Επαναληπτικές συνδυαστικές ασκήσεις στα θεωρήματα Bolzano,Rolle και Θ.Μ.Τ

1. Θεωρούμε την συνάρτηση $f: R \to R$ για την οποία ισχύουν:
    - Είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R
    - $f(2) = 2$
    - $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{ημ3x} = 3$
    - $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0,2)$

Να αποδείξετε ότι :

α) $f(0) = 0$ και $f'(0) = 9$

β) η $f'(x)$ έχει το πολύ μία ρίζα στο (0,2)

γ) υπάρχει $\xi \in (0,2)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = 2 - \xi$

δ) υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (0,2)$, τέτοια ώστε $f'(\xi_1) \cdot f'(\xi_2) = 1$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \to R$ με α>0 ,η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β) και $f(a) = 0 = f(\beta)$.

α) να αποδείξετε ότι :

i) υπάρχει $x_1 \in (\alpha, \beta)$ με $x_1 f'(x_1) = f(x_1)$ και ότι η εφαπτομένη της C_f στο $M(x_1, f(x_1))$ περνάει από την αρχή των αξόνων.

ii) εφαρμόζεται το Θεώρημα Rolle για τη $g(x) = e^{\frac{x}{k}} \cdot f(x)$ στο $[\alpha, \beta]$ με $\kappa \neq 0$ και υπάρχει $x_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $\kappa f'(x_2) + f(x_2) = 0$.

β) Αν επιπλέον η $f'(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β) να αποδείξετε ότι:

i) $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$

ii) υπάρχει μοναδικό x_0 ∈(α,β) στο οποίο η f παρουσιάζει ελάχιστο.