



ΘΕΜΑ Α

A1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{\lambda x}$.

- i. Να βρείτε τις $f'(x)$ και $f''(x)$ και στη συνέχεια να βρείτε την τιμή του λ ώστε να ισχύει :
 $f''(x) + 2f'(x) = 3f(x)$ για κάθε $x \in \mathfrak{R}$. (ΜΟΝΑΔΕΣ 6)
- ii. Αν ισχύει $\lambda = -3$, να βρείτε την εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων. (ΜΟΝΑΔΕΣ 7)

A2. Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ για τις οποίες ισχύει : $f(x^2) = (2x^3 + 3x^2)^2 \cdot g(x)$ για κάθε $x \in \mathfrak{R}$. Αν η ευθεία $(\varepsilon) : y = 3x - 1$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στο σημείο της $A(1, f(1))$, τότε να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_g στο σημείο της $B(-1, g(-1))$. (ΜΟΝΑΔΕΣ 6)

A3. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \alpha \ln x + \beta x^2$ και $g(x) = x^2 + 2\beta x + \alpha$, με $\alpha, \beta \in \mathfrak{R}$. Να βρείτε τις τιμές των α, β ώστε οι C_f, C_g να έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο με τετμημένη $x_0 = 1$ (ΜΟΝΑΔΕΣ 6)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται συνάρτηση $f(x) = \alpha e^x + \beta x^2$ με $\alpha, \beta \in \mathfrak{R}$. Αν η ευθεία $(\varepsilon) : y = -6x + 2$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f' στο σημείο της $A(0, f'(0))$ τότε :

B1. Να δείξετε ότι $\alpha = 2, \beta = -4$. (ΜΟΝΑΔΕΣ 8)

B2. Να βρείτε τα όρια : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta\mu x}{f(x)}$. (ΜΟΝΑΔΕΣ 8)

B3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $M(x_0, f(x_0))$ να είναι κάθετη στην ευθεία $(\delta) : x - 2y + 1 = 0$. (ΜΟΝΑΔΕΣ 9)

ΘΕΜΑ Γ

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο \mathfrak{R} , της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(0,1)$.

Γ1. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2) - 1}{x}$. (ΜΟΝΑΔΕΣ 5)

Γ2. Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(2x) - 1}{x} = 4f'(0)$ (ΜΟΝΑΔΕΣ 5)

Γ3. Αν επιπλέον για την f ισχύει $f^2(x) - 4f(x) = x^2 - 3$, για κάθε $x \in \mathfrak{R}$, να βρείτε τον τύπο της f . (ΜΟΝΑΔΕΣ 5)

Γ4. Αν $f(x) = 2 - \sqrt{x^2 + 1}$, $x \in \mathfrak{R}$, να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της f οι οποίες διέρχονται από το σημείο $B\left(0, \frac{3}{2}\right)$. (ΜΟΝΑΔΕΣ 5)

Γ5. Έστω σημείο M της γραφικής παράστασης της f με θετική τετμημένη. Αν η τετμημένη του M απομακρύνεται από την αρχή των αξόνων O με ταχύτητα 2cm/sec , να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου OAM . (ΜΟΝΑΔΕΣ 5)

ΘΕΜΑ Δ

Ένα υλικό σημείο $M(x,y)$ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = f(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$. Τη χρονική στιγμή t_0 που το σημείο M διέρχεται από το σημείο $A(1,1)$ η τετμημένη του αυξάνει με ρυθμό 2cm/sec .

Δ1. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του M τη χρονική στιγμή t_0 . (ΜΟΝΑΔΕΣ 5)

Δ2. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της απόστασης $d(t)$ του M από την αρχή των αξόνων τη χρονική στιγμή t_0 . (ΜΟΝΑΔΕΣ 5)

Δ3. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της γωνίας θ που σχηματίζει η διανυσματική ακτίνα OM με τον άξονα x τη χρονική στιγμή t_0 . (ΜΟΝΑΔΕΣ 5)

Δ4. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του ορθογώνιου με διαγώνιο OM τη χρονική στιγμή t_0 . (ΜΟΝΑΔΕΣ 5)

Δ5. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της γωνίας ω που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f στο M με τον άξονα x τη χρονική στιγμή t_0 . (ΜΟΝΑΔΕΣ 5)