# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

## ΘΕΜΑ Α

**Α1.** Έστω δυο συναρτήσεις $f, g$ ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν

- οι $f, g$ είναι συνεχείς στο Δ και
- $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ,

τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει $f(x) = g(x) + c$

**Μονάδες 6**

**Α2.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$ , $\alpha > 0$ είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$ και ισχύει $f'(x) = \alpha^x \ln \alpha$ , δηλαδή : $(\alpha^x)' = \alpha^x \ln \alpha$ .

**Μονάδες 5**

**Α3.** Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :

«Έστω μια συνάρτηση $f$ , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν η $f$ είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ τότε υποχρεωτικά ισχύει $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ».

**α.** Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα **Α**, αν είναι Αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι Ψευδής. (Μονάδα 1)

**β.** Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (Μονάδες 3)

**Μονάδες 4**

**Α4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

**Μονάδες 10**

**i)** Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f$ στο σημείο της $\mathrm{M}(x_0, f(x_0))$ δεν έχει άλλο κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση της $f$.

**ii)** Αν μια συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο κλειστό $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο ανοικτό $(\alpha, \beta)$ και υπάρχει ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$, τότε ισχύει πάντα ότι $f(\alpha) = f(\beta)$.

**iii)** Αν η συνάρτηση $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$ και δεν είναι αντιστρέψιμη, τότε υπάρχει κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, στο οποίο η $f$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle.

**iv)** Αν η συνάρτηση $g$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0$ και η $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$, τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0$ και ισχύει $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$.

**v)** Κάθε συνάρτηση f, για την οποία ισχύει $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, είναι σταθερή στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

## ΘΕΜΑ Β

Έστω $f: R \to R$ μια συνάρτηση με $f(0) = 1$ η οποία είναι συνεχής και ισχύει

$f^2(x) = 1 - 2xf(x)$ για κάθε $x \in R$

Α) Να δείξετε ότι $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$, $x \in R$

**Μονάδες 7**

Β) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \to 0}\left[(f(x) + x - 1)\eta\mu \frac{1}{x}\right]$

**Μονάδες 5**

Γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της f που είναι παράλληλη στην ευθεία $x + y - 2020 = 0$

**Μονάδες 6**

Δ) Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (-1,1)$ ώστε $f'(\xi)+2\xi f(\xi)=\xi^2 f'(\xi)$

**Μονάδες 7**

# ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x\ln x}{x-1} & 0<x\neq 1 \\ \alpha & x=1 \end{cases}$, $\alpha \in \Re$.

**Γ1.** Αν η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ να δείξετε ότι $\alpha=1$.

**Μονάδες 4**

**Γ2.**Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της $f$ στο σημείο $\mathrm{A}(1, f(1))$.

**Μονάδες 5**

**Γ3.** Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

**Μονάδες 5**

**Γ4.** Να βρείτε το σύνολο τιμών της $f$ (Μονάδες 3) και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η εξίσωση : $f\left(f(x)+\dfrac{1}{\pi}\right)=1$, έχει ακριβώς μια ρίζα. (Μονάδες 3)

**Μονάδες 6**

**Γ5.** Να υπολογίσετε το όριο : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x-1)}{f(x^2)-f(x)}$.

**Μονάδες 5**

**ΘΕΜΑ Δ**

Έστω $f:(0,+\infty)\to R$ μια συνάρτηση με $f(1)=0$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει

$xf(x)=1-x^2 f'(x)$ για κάθε $x>0$

Α)Να δείξετε ότι $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ , $x>0$

**Μονάδες 7**

Β) Αν $\alpha,\beta\in(0,+\infty)$ με $\alpha<\beta$ και ισχύει $\alpha^{\beta}=\beta^{\alpha}$ να δείξετε ότι $1<\alpha<e<\beta$

**Μονάδες 6**

Γ) Αν $x_1,x_2$ $(x_1<x_2)$ ρίζες της εξίσωσης $3f(x)=1$ να δείξετε ότι υπάρχει $x_o\in(x_1,x_2)$ τέτοιο

ώστε $3f'(x_o)+3f(x_o)=1$

**Μονάδες 6**

Δ) Να δείξετε ότι $(x+1)f(x+1)-xf(x)<\dfrac{1}{x}$ για κάθε $x>0$

**Μονάδες 6**

***ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ***