Δίνεται η $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$f^3(x) + e^{f(x)} = x + e \quad (1)\,, \quad f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

β. Να βρεθεί το $f(1)$.

γ. Να βρεθεί η f^{-1}.

δ. Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{f^{-1}(x)}{2^{\frac{1}{x}}+3^{\frac{1}{x}}}$.

ε. Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{(f(2))^x+(f(3))^{x+1}+(f(4))^x}{(f(2))^{x+1}+(f(3))^x+2(f(4))^x}$.

στ. Θεωρούμε τη $g(x) = 2x^3 - x^2 - 4x + 1$.

i) Να δείξετε ότι έχει δύο ρίζες $x_1, x_2 \quad (x_1, < x_2)$ στο $(0,2)$.

ii) Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε

$$f\left(\xi \ln\xi \lim_{x\to+\infty}\left(\left(e^{\frac{1}{f(x)}}-1\right)\eta\mu x + \left(f(x) + \sigma\upsilon\nu f(x)\eta\mu\frac{1}{f(x)}\right)\right)\right) - f\left(g\left(\xi + g(\xi)\right)\right) = 0$$