ΠΑΡΑΒΟΛΗ – ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΑΣΚΗΣΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

1. Έστω $M(x_1, y_1)$ το σημείο επαφής της ζητούμενης εφαπτομένης ε με την C: $y^2 = 2x$.

Έχω $\boldsymbol{x_1 = \frac{y_1^2}{2}}$, **(1)** $(x_1, y_1 \neq 0)$.

Η εξίσωση της ε είναι: $y \cdot y_1 = x + x_1$ και τέμνει τον $x'x$ στο $A(-x_1, 0)$ και τον $y'y$ στο $B(0, \frac{x_1}{y_1})$.

Ισχύει: $(OAB) = 1 \Leftrightarrow$

$\frac{1}{2} \cdot |x_A \cdot y_B| = 1 \Leftrightarrow$

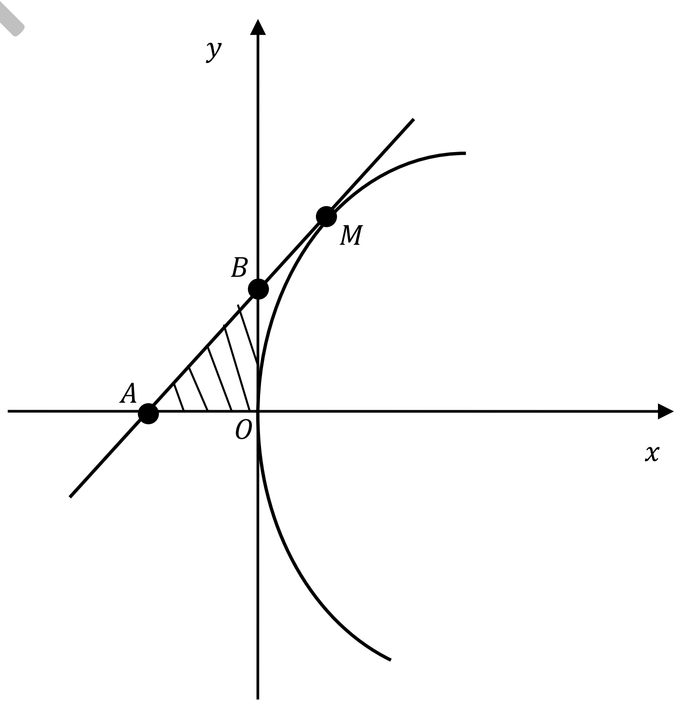
$\left|-\frac{x_1^2}{y_1^2}\right| = \mathbf{2}$ $\mathbf{(2)}$

$\mathbf{(1)} \rightarrow \mathbf{(2)}$: $\left|-\frac{y_1^4}{4y_1}\right| = 2 \Leftrightarrow$

$|y_1^3| = 8 = 2^3 \Leftrightarrow$

$|y_1| = 2 \Leftrightarrow$

$y_1 = \pm 2$



- Για $y_1 = 2, (1)$: $x_1 = 2 \ \ και \, η \ \ ε: y \cdot 2 = x + 2$ ή $x - 2y + 2 = 0$
- Για $y_2 = -2, (1)$: $x_1 = 2 \ και \, η \ ε: y \cdot (-2) = x + 2$ ή $x + 2y + 2 = 0$

2. Έστω λ ο σ.δ. της ε.
Έχω, $\varepsilon: y = \lambda x + 1$.
Τα B, Γ είναι λύσεις του συστήματος.

$$\begin{cases} \varepsilon: \boldsymbol{y = \lambda x + 1}, (\mathbf{1}) \\ C: \boldsymbol{y = x^2}, \ \ (\mathbf{2}) \end{cases}$$

$$(1) \to (2): \boldsymbol{x^2 - \lambda x - 1 = 0} \ (\mathbf{3})$$

Ρίζες της (3) είναι τα x_B, x_Γ και αφού $x_\Delta = x_B, x_E = x_\Gamma$, έχω:

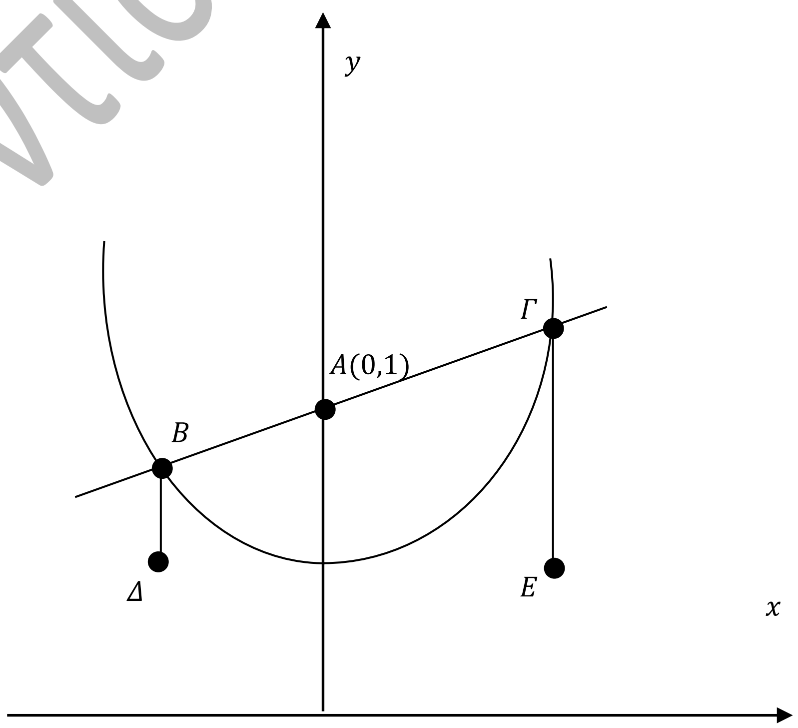
$\boldsymbol{x_B \cdot x_\Gamma = x_\Delta \cdot x_E = -1}$ $(\mathbf{4})$, γινόμενο ριζών της (3).

Ισχύουν: $\overrightarrow{A\Delta} = (x_\Delta, -1)$ και $\overrightarrow{AE} = (x_E, -1)$, οπότε:

$$\overrightarrow{A\Delta} \cdot \overrightarrow{AE} = x_\Delta \cdot x_E + 1 = -1 + 1 = 0 \iff$$

$$\overrightarrow{A\Delta} \perp \overrightarrow{AE} \iff$$

$$\Delta \hat{A} E = \frac{\pi}{2}$$

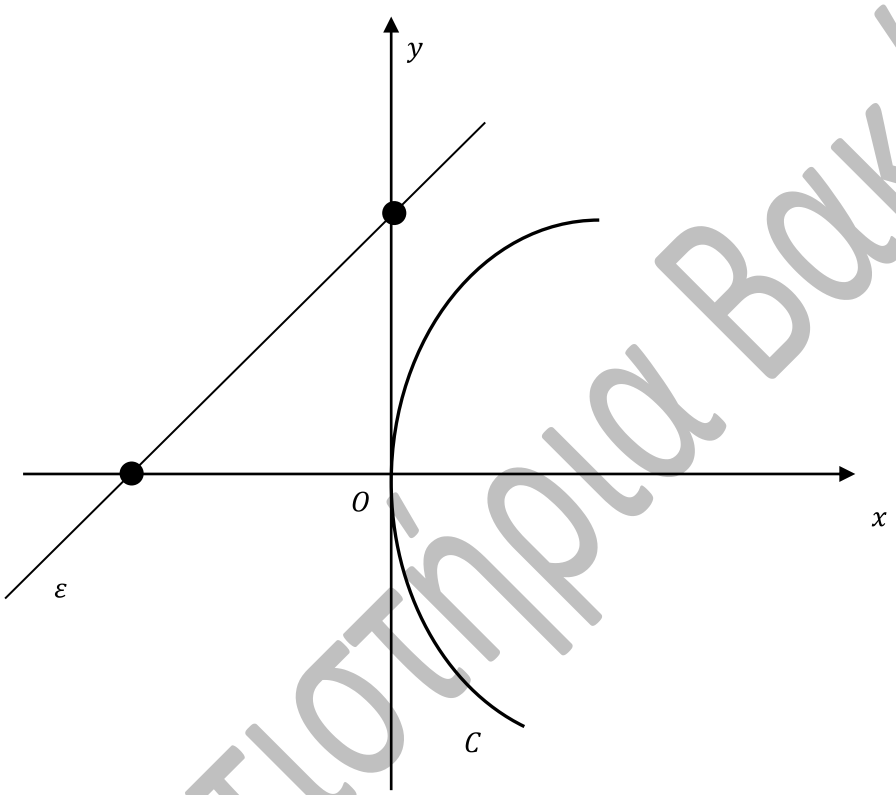


3. α) Αρκεί να δείξω ότι το σύστημα $\begin{cases} \varepsilon: \boldsymbol{y = 2x + 4, (1)} \\ C: \boldsymbol{y^2 = 4x, (2)} \end{cases}$ δεν έχει λύσεις στο IR.

$(1) \to (2)$: $(2x+4)^2 = 4x \Leftrightarrow$

$4x^2 + 12x + 16 = 0$ ή $x^2 + 3x + 4 = 0$

Η εξίσωση έχει διακρίνουσα $\Delta = 9 - 16 = -7$, οπότε δεν έχει λύσεις στο IR.



β) Το σημείο της C με την μικρότερη απόσταση από την ε είναι εκείνο στο οποίο η εφαπτομένη της C είναι παράλληλη με την ε.

Έστω $P_1(x_1, y_1)$ το σημείο αυτό. Έχω $P_1 \in C$: $y_1^2 = 4x_1$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο P_1είναι: $y \cdot y_1 = 2 \cdot (x + x_1)$ και έχει σ.δ. $\frac{2}{y_1}$ $(y_1 \neq 0)$

Άρα, $\frac{2}{y_1} = \lambda_\varepsilon = 2 \Leftrightarrow$

$y_1 = 1$

Οπότε, $x_1 = \frac{1}{4}$, δηλαδή $P_1\left(\frac{1}{4}, 1\right)$.

Έχω $d(P_{1,}\varepsilon) = \frac{(\frac{1}{2}-1+4)}{\sqrt{5}} = \frac{7}{2\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{10}$, η μικρότερη απόσταση

γ) Έστω $M\ (x_M, y_M)$.

Θέτω $x_M = \mu$, οπότε $y_M = 2\mu + 4, \mu \epsilon IR$

Η AB είναι η πολική του M ως προς την C. Επομένως, η AB έχει εξίσωση:

$$y \cdot y_M = 2(x + x_M) \iff$$

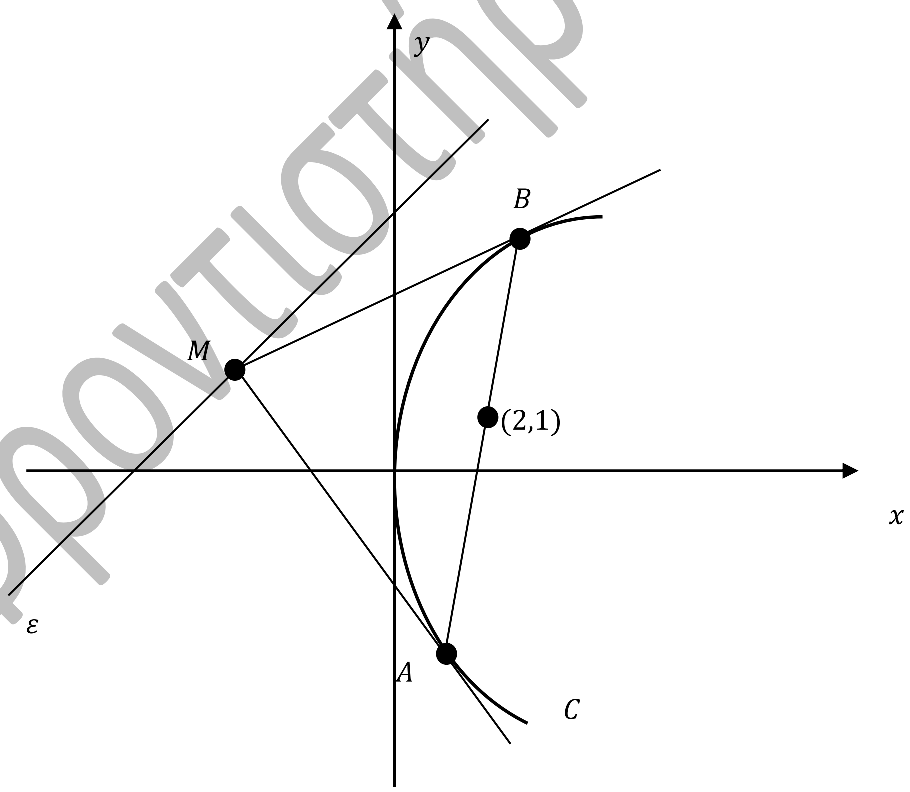
$$y(2\mu + 4) = 2x + 2\mu \iff$$

$$(2y - 2)\mu + (4y - 2x) = 0 \ \acute{\eta} \ \boldsymbol{(y-1)\mu + (2y - x) = 0}\,,\ \boldsymbol{(3)}$$

Αναζητώ σημείο που επαληθεύει την (3) για κάθε $\mu \epsilon IR$.

Είναι εκείνο για το οποίο $\begin{cases} y - 1 = 0 \\ 2y - x = 0 \end{cases}$

Άρα, είναι το (2,1)



4. Θέτω $y_A = \alpha, έχω\ x_A = \frac{\alpha^2}{2p}, δηλαδή\ A\ (\frac{\alpha^2}{2p}, \alpha)$

Θέτω $y_B = \beta, έχω\ x_B = \frac{\beta^2}{2p}, δηλαδή\ B\ (\frac{\beta^2}{2p}, \beta)$

με $\alpha \neq \beta, \quad \alpha, \beta\ \epsilon\ IR^*$.

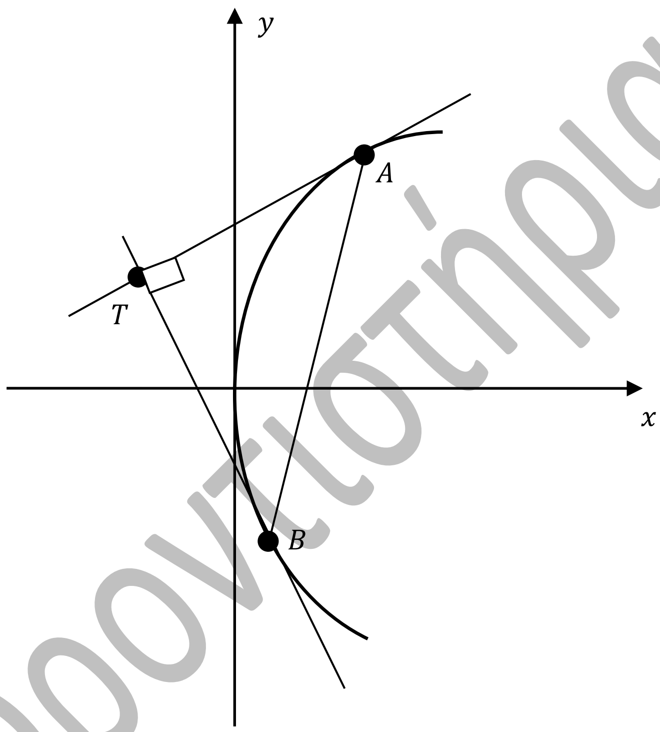
Η εφαπτομένη στο Α είναι η $\varepsilon_1 : y \cdot y_A = p(x + x_A)$ή $y = \frac{p}{a}x + \frac{a}{2}$

Η εφαπτομένη στο Β είναι η $\varepsilon_2 : y = \frac{p}{\beta}x + \frac{\beta}{2}$

Έχω $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \quad \Leftrightarrow$

$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1 \ \Leftrightarrow$

$\frac{p^2}{\alpha\beta} = -1$ ή $\boldsymbol{\alpha\beta = -p^2}$ **(1)**



α) Αρκεί να δείξω ότι π.χ. $\overrightarrow{EA} // \overrightarrow{EB} \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EB}) = 0$

Έχω, $\overrightarrow{EA} = \left(\frac{\alpha^2}{2p} - \frac{p}{2}, \alpha\right)$ $και$ $\overrightarrow{EB} = (\frac{\beta^2}{2p} - \frac{p}{2}, \beta)$

Άρα,

$$\det(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EB}) = \begin{vmatrix} \dfrac{\alpha^2 - p^2}{2p} & \alpha \\ \dfrac{\beta^2 - p^2}{2p} & \beta \end{vmatrix} = \frac{\beta \cdot (\alpha^2 - p^2) - \alpha \cdot (\beta^2 - p^2)}{2p} = \frac{\alpha\beta \cdot (\alpha - \beta) + p^2(\alpha - \beta)}{2p}$$

$$= \frac{(\alpha - \beta) \cdot (\alpha\beta + p^2)}{2p} = 0$$

Διότι από την (1): $\alpha\beta + p^2 = -p^2 + p^2 = 0$

β) Το T είναι η λύση του συστήματος των ε_1 και ε_2.

Έχω: $\begin{cases} \varepsilon_1: y = \frac{p}{\alpha}x + \frac{\alpha}{2}, (2) \\ \varepsilon_2: y = \frac{p}{\beta}x + \frac{\beta}{2}, (3) \end{cases}$

$(2) - (3): 0 = px\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right) + \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \Leftrightarrow$

$px\frac{(\beta - \alpha)}{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\beta - \alpha) \overset{\beta \neq \alpha}{\Longleftrightarrow}$

$x_T = \frac{\alpha\beta}{2p}, και\ αφού\ \alpha\beta = -p^2, x_T = -\frac{p}{2}$

Άρα, το T είναι σημείο της ευθείας $x = -\frac{p}{2}$ (που είναι η διευθετούσα της παραβολής).

5. **α)** Πρέπει το σύστημα των εξισώσεων των C και ε να έχει δυο διαφορετικές λύσεις.

Έχω: $\begin{cases} C: \boldsymbol{y^2 = 2x, (1)} \\ \varepsilon: \boldsymbol{y = \lambda x + 2, (2)} \end{cases}$

$(2) \to (1): (\lambda x + 2)^2 = 2x \Leftrightarrow$

$\boldsymbol{\lambda^2 x^2 + 2(2\lambda - 1)x + 4 = 0, (3)}$

Για δυο διαφορετικές λύσεις, πρέπει η διακρίνουσα της (3) να είναι θετική.

Έχω: $4(2\lambda - 1)^2 - 16\lambda^2 > 0 \Leftrightarrow$

$4\lambda^2 - 4\lambda + 1 - 4\lambda^2 > 0 \Leftrightarrow$

$\lambda < \frac{1}{4}$

Άρα, η ε τέμνει την C σε δυο σημεία για $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $\lambda < \frac{1}{4}$

β) Έχω $x_M = \frac{x_B + x_\Gamma}{2} = -\frac{(2\lambda - 1)}{\lambda^2} = \frac{1 - 2\lambda}{\lambda^2}$, (4)

Επίσης, $M \in \varepsilon$: $y_M = \frac{\lambda(1 - 2\lambda)}{\lambda^2} + 2 = \frac{1 - 2\lambda + 2\lambda}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}$, (5)

Απαλείφοντας το λ από τις (4) και (5): $x_M = \frac{1}{\lambda^2} - 2\frac{1}{\lambda} = y_M^2 - 2y_M$

Άρα, το M είναι σημείο της παραβολής $x + 2y - y^2 = 0$.