ΠΑΡΑΒΟΛΗ ΘΕΜΑΤΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Π. Δρακουλάκος

1. Αφού η C έχει άξονα τον $x'x$, η εξίσωση της είναι της μορφής $y^2 = 2\rho x, \quad \rho \neq 0.$

Εύρεση του ρ.

1ος τρόπος: Αφού η $y^2 = 2\rho x$ και η $y = x + 2$ εφάπτονται, το σύστημα

$\begin{cases} y^2 = 2\rho x, & (1) \\ y = x + 2, & (2) \end{cases}$ έχει μία διπλή λύση.

$(2): x = y - 2 \to (1): y^2 = 2\rho(y-2) \Leftrightarrow y^2 - 2\rho y + 4\rho = 0, \ (3).$

Για διπλή λύση στο σύστημα, η (3) πρέπει να έχει μία διπλή ρίζα, δηλαδή διακρίνουσα ίση με το 0.

Άρα, $4\rho^2 - 16\rho = 0 \Leftrightarrow 4\rho(\rho - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = 0, \ \textit{απορρίπτεται} \\ \rho = 4. \end{cases}$

Για $\rho = 4$, η $C: y^2 = 8x$.

2ος τρόπος: Έστω $P_1(x_1, y_1)$ το σημείο επαφής της $\varepsilon: y = x + 2$ με την $C: y^2 = 2\rho x$. Η εφαπτομένη στο P_1 έχει εξίσωση $yy_1 = \rho(x + x_1)$ και ταυτίζεται με την ε.

Άρα: $\dfrac{P}{1} = \dfrac{-y_1}{-1} = \dfrac{Px_1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = \rho \end{cases}$ και αφού $P_1(2, \rho) \in C: \rho^2 = 4\rho \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho = 0, \ \textit{απορρίπτεται} \\ \rho = 4 \end{cases}$, οπότε $C: y^2 = 8x$.

(**α**) Αφού η χορδή διέρχεται από το $O(0,0)$, άκρα της είναι τα O και $M(x_M, y_M)$ όπου M τυχαίο σημείο της C. Έστω N το μέσο της χορδής. Έχω

$$\begin{cases} x_N = \dfrac{x_M}{2}, & (4) \\ y_N = \dfrac{y_M}{2}, & (5). \end{cases}$$

Έχω, επίσης, $y_M^2 = 8x_M$, (6). Απαλείφοντας τα x_M, y_M : $4y_N^2 = 16x_N$. Άρα το N είναι σημείο της παραβολής $y^2 = 4x$, με εξαίρεση το $O(0,0)$.

(**β**) Για να τέμνει η $y = x + \beta$ την C σε δύο σημεία, πρέπει το σύστημα των εξισώσεων τους να έχει δύο διαφορετικές λύσεις.

Έχω $\begin{cases} y^2 = 8x, & (7) \\ y = x + \beta, & (8). \end{cases}$ Άρα $x = y - \beta \to (7)$: $y^2 = 8(y - \beta) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y^2 - 8y + 8\beta = 0$, (9). Για διαφορετικές λύσεις στο σύστημα, πρέπει η (9) να έχει δυο διαφορετικές ρίζες, δηλαδή διακρίνουσα > 0.

Έχω: $64 - 32\beta > 0 \Leftrightarrow \beta < 2$.

Άρα, τέμνει σε δυο σημεία για $\beta < 2$.

(**γ**) ***1ος τρόπος***

Αναζητώ σημείο $P(x,y)$ της C τέτοιο ώστε $d(P_1, \zeta) = minimum$.

Έχω $d(P_1, \zeta) = \dfrac{|x_1 - y_1 + 6|}{\sqrt{2}} = \dfrac{\left|\dfrac{y_1^2}{8} - y_1 + 6\right|}{\sqrt{2}}$ το τριώνυμο $\dfrac{y_1^2}{8} - y_1 + 6$ παρουσιάζει ελάχιστο όταν $y_1 = -\dfrac{(-1)}{2\left(\frac{1}{8}\right)} = 4$. Για $y_1 = 4$, $d_{min} = \dfrac{\left|\frac{16}{8} - 4 + 6\right|}{\sqrt{2}} = \dfrac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$ και το $P(2,4)$.

2ος τρόπος

Το P είναι το σημείο της C στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη με την ζ.

Έστω $P(x_1, y_1)$. Έχω $P \in C$: $y_1^2 = 8x_1, (1o)$. Η εφαπτομένη στο P έχει εξίσωση

$y\cdot y_1=4(x+x_1)$ και αφού είναι $\|\zeta$, έχω $\frac{4}{y_1}=1\Leftrightarrow y_1=4$. Για $y_1=4,\ x_1=2$

δηλαδή $P_1(2,4)$ και $d_{min}=d(P_1,\zeta)=\frac{|2-4+6|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$.

2. Θέτω $y_M=\mu$, έχω $x_M=\frac{\mu^2}{64}$ δηλαδή $M\left(\frac{\mu^2}{64},\mu\right),\ \mu\in\mathbb{R}^*$. Η εφαπτομένη στο M

έχει εξίσωση: $yy_M=32(x+x_M)\Leftrightarrow y=\frac{32}{\mu}x+\frac{\mu}{2}$. Τα σημεία τομής της με τους

άξονες, είναι $A\left(-\frac{\mu^2}{64},0\right)$ και $B\left(0,\frac{\mu}{2}\right)$.

Αφού το N είναι μέσο του AB, έχω $\begin{cases}x_N=\frac{x_A+x_B}{2}=-\frac{\mu^2}{128}, & (1)\\ y_N=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{\mu}{4}, & (2)\end{cases}$

Απαλείφοντας το μ από τις (1) και (2), έχω:

$x_N=-\frac{16y_N^2}{128}\Leftrightarrow y_N^2=-8x_N$.

Άρα, γ.τ. του N η παραβολή $y^2=-8x$, με εξαίρεση την κορυφή της $0(0,0)$.

3. Έστω $P_1(x_1,y_1)$ το σημείο επαφής της ζητούμενης κοινής εφαπτομένης ε με την

$C_1: y^2=8x$. Έχω $y_1^2=8x_1,\ (1)$. Η ε έχει τύπο: $yy_1=4(x+x_1)$ και αφού

εφάπτεται και με τον C_2, ισχύει $d(0(0,0),\varepsilon)=\sqrt{2}\Leftrightarrow\frac{|4x_1|}{\sqrt{16+y_1^2}}=\sqrt{2},\ (2)$.

$(1)\to(2)$: $|4x_1|=\sqrt{2}\cdot\sqrt{16+8x_1}\Leftrightarrow 16x_1^2=2\cdot 8(2+x_1)$ ή $x_1^2-x_1-2=0$ οπότε

$x_1=\frac{1\pm 3}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=2\\ x_1=-1\ \textit{απορρίπτεται αφού}\ x_1\geq 0.\end{cases}$

Για $x_1=2,\ y_1^2=16$ δηλαδή $y_1=\pm 4$ οπότε $P_1(2,4)$ ή $P_1(2,-4)$ και η

$\varepsilon_1: y\cdot 4=4(x+2)$ ή $y=x+2$ ενώ η $\varepsilon_2: y=-x-2$.

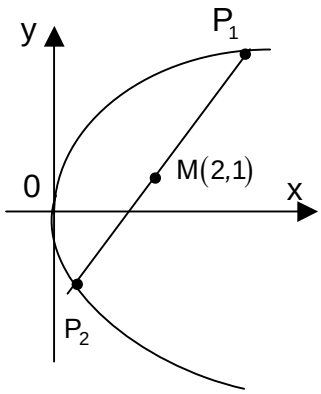
4. Η σχετική θέση της $\varepsilon: y=\lambda x+\kappa$ με την $C: y^2=2\rho x$ διευκρινίζεται λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων τους και ερμηνεύοντας γεωμετρικά κάθε είδος λύσης.

Έχω: $\begin{cases} y^2=2\rho x, & (1) \\ y=\lambda x+\kappa, & (2) \end{cases}$

$(2)\to(1): (\lambda x+\kappa)^2=2\rho x \Leftrightarrow \lambda^2x^2+2(\kappa\lambda-\rho)x+\kappa^2=0, \ (3).$

- Αν $\lambda=0$, η (3) είναι η πρωτοβάθμια εξίσωση $-2\rho x+\kappa^2=0$ και έχει λύση $x=\dfrac{\kappa^2}{2\rho}$ οπότε, $(2): y=\kappa$. Άρα, αν $\lambda=0$ για κάθε $\kappa\in\mathbb{R}$, η $\varepsilon: y=\kappa$ τέμνει την C σε ένα σημείο, το $\left(\dfrac{\kappa^2}{2\rho},\kappa\right)$.
- Αν $\lambda\neq 0$, η (3) είναι δευτεροβάθμια και το είδος των ριζών της εξαρτάται από την διακρίνουσά της,
  $\Delta=4(\kappa\lambda-\rho)^2-4\kappa^2\lambda^2=4(\kappa^2\lambda^2-2\rho\kappa\lambda+\rho^2-\kappa^2\lambda^2)=$
  $=4(\rho^2-2\rho\kappa\lambda)=4\rho(\rho-2\kappa\lambda).$
  - i) $\Delta>0 \Leftrightarrow 4\rho(\rho-2\kappa\lambda)>0 \overset{\rho>0}{\Leftrightarrow} \rho-2\kappa\lambda>0,$ είναι η συνθήκη για δυο διαφορετικές ρίζες. Άρα, όταν $\rho>2\kappa\lambda$ η ε **τέμνει** την C σε δύο διαφορετικά σημεία.
  - ii) $\Delta=0 \Leftrightarrow \rho=2\kappa\lambda,$ η συνθήκη για μία «διπλή» ρίζα. Άρα, όταν $\rho=2\kappa\lambda$ η ε **εφάπτεται** με την C.
  - iii) $\Delta<0 \Leftrightarrow \rho<2\kappa\lambda$, η συνθήκη για να μην έχει η (3) λύσεις στο $\mathbb{R}$. Άρα, όταν $\rho<2\kappa\lambda$ η ε και η C δεν έχουν κοινά σημεία.

5.



$C: y^2=4x$

Έστω $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$ τα άκρα της χορδής. Ο συντελεστής διευθύνσεως λ της P_1,P_2 είναι: $\lambda=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ ($x_1\neq x_2$ διότι το $M\notin x'x$). Ισχύουν: $P_2\in C: y_2^2=4x_2, \ (1)$ και $P_1\in C: y_1^2=4x_1, \ (2).$

$(1)-(2): y_2^2-y_1^2=4(x_2-x_1)$ ή

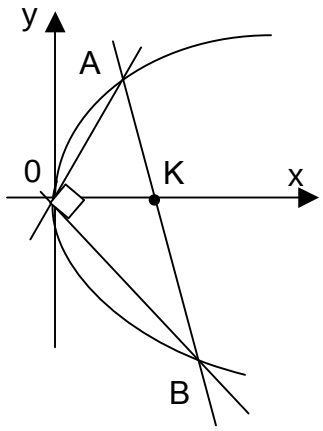
$(y_2+y_1)(y_2-y_1)=4(x_2-x_1)$ ή

$(y_2+y_1)\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=4$ ή

$(y_2+y_1)\cdot\lambda=4.$

Αλλά, αφού το $M(2,1)$ είναι το μέσο του P_1,P_2, έχω: $\frac{y_1+y_2}{2}=y_M=1$, οπότε $y_1+y_2=2$. Άρα, $2\lambda=4$ οπότε $\lambda=2$ και η P_1,P_2 έχει εξίσωση: $y-y_M=\lambda(x-x_M)$ δηλαδή $y-1=2(x-2)\Leftrightarrow y=2x-3$.

6.



Έστω $y_A=\alpha$ οπότε $x_A=\frac{\alpha^2}{2\rho}$ και $y_B=\beta$ οπότε $x_B=\frac{\beta^2}{2\rho}$ με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^*$, $\alpha\neq\beta$. Έχω $\overrightarrow{OA}=\left(\frac{\alpha^2}{2\rho},\alpha\right)$ και $\overrightarrow{OB}=\left(\frac{\beta^2}{2\rho},\beta\right)$ και αφού $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$, έχω:

$$\frac{\alpha^2\beta^2}{4\rho^2}+\alpha\beta=0\Leftrightarrow\alpha^2\beta^2+4\rho^2\alpha\beta=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\alpha\beta(\alpha\beta+4\rho^2)=0\overset{\alpha\beta\neq0}{\Leftrightarrow}\alpha\beta=-4\rho^2,\quad(1).$$ Ισχύει

$\lambda_{AB}=\frac{\beta-\alpha}{\frac{\beta^2}{2\rho}-\frac{\alpha^2}{2\rho}}=\frac{2\rho(\beta-\alpha)}{(\beta+\alpha)(\beta-\alpha)}=\frac{2\rho}{\beta+\alpha}$, $\beta\neq-\alpha$ οπότε, η εξίσωση της AB είναι:

$y-\alpha=\frac{2\rho}{\beta+\alpha}\left(x-\frac{\alpha^2}{2\rho}\right)$ ή $(\beta+\alpha)y-\alpha(\beta+\alpha)=2\rho x-\frac{2\alpha^2\rho}{2\rho}$ ή

$2\rho x-(\alpha+\beta)y+\alpha\beta=0$ ή, αφού $\alpha\beta=-4\rho^2$, η AB είναι η

$2\rho x-(\alpha+\beta)y-4\rho^2=0$. Για $y=0$, για κάθε α,β έχω $x=2\rho$. Άρα, η AB διέρχεται από το σταθερό σημείο $K(2\rho,0)$.

Αν $\beta=-\alpha$, από την (1): $-\alpha^2=-4\rho^2$ ή $\alpha^2=4\rho^2$.

Η ευθεία AB έχει εξίσωση $x=x_A=\frac{4\rho^2}{2\rho}=2\rho$ και διέρχεται και αυτή από το $K(2\rho,0)$.

Άρα σε κάθε περίπτωση, η AB διέρχεται από το σταθερό σημείο $K(2\rho,0)$.

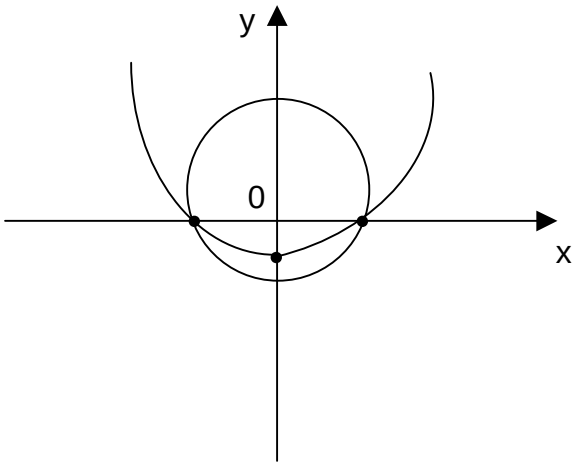
7. Έστω $M(x_M, y_M)$ το κέντρο κύκλου που βρίσκεται στο $1^ο$ τεταρτημόριο, $(x_M > 0,\ y_M > 0)$, εφάπτεται με τον $x^2 + y^2 = 4$ εξωτερικά, και εφάπτεται και με τον $x'x$. Έστω επίσης, ρ η ακτίνα του.

Έχω: $(OM) = 2 + \rho \Leftrightarrow \sqrt{x_M^2 + y_M^2} = 2 + \rho, \quad (1)$

$d(M,\ x'x) = \rho \Leftrightarrow |y_M| = \rho$ και αφού $y_M > 0,\ \rho = y_M, \quad (2).$

$(2) \to (1)$: $x_M^2 + y_M^2 = (2 + y_M)^2$ δηλαδή $x_M^2 + y_M^2 = 4 + 4y_M + y_M^2$ οπότε $x_M^2 = 4(y_M + 1)$.

Άρα το M είναι σημείο της παραβολής $x^2 = 4(y + 1)$,

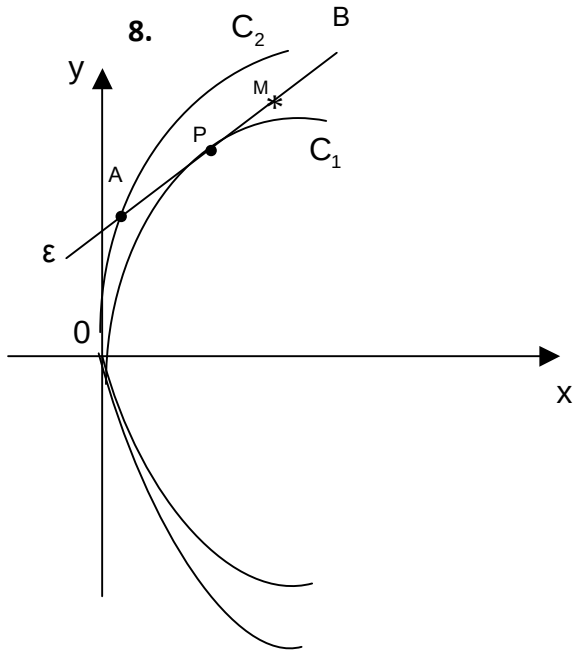


[στο τμήμα της για $x > 2$, αφού

$y = \frac{x^2}{4} - 1 > 0 \Leftrightarrow x^2 > 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x < -2$ *ή* $x > 2$ και ισχύει $x > 0$.]

8.



Έστω P το σημείο της C_1 στο οποίο φέρεται τυχαία εφαπτομένη της. Θέτω $y_P = \mu$, έχω $x_P = \frac{\mu^2}{4}, \mu \in \mathbb{R}^*$. Η εφαπτομένη της C_1 στο P είναι:

$\varepsilon : yy_P = 2(x + x_P)$ ή

$y = \frac{2}{\mu}x + \frac{\mu}{2}$. Τα A, B είναι οι λύσεις του συστήματος των εξισώσεων της

$C_2 : y^2 = 8x, \quad (1)$ με την

ε, (2). $\begin{cases} (1) : y^2 = 8x \\ (2) : y = \frac{2}{\mu}x + \frac{\mu}{2} \end{cases}$

$$(2) \to (1) : \left(\frac{2}{\mu}x + \frac{\mu}{2}\right)^2 = 8x \Leftrightarrow \frac{4}{\mu^2}x^2 + 2x + \frac{\mu^2}{4} = 8x \text{ ή } \frac{4}{\mu^2}x^2 - 6x + \frac{\mu^2}{4} = 0, \quad (3).$$

Ρίζες της (3), είναι τα x_A, x_B. Ισχύει $x_A + x_B = "S" = \frac{6}{2 \cdot \frac{4}{\mu^2}} = \frac{3\mu^2}{2}$ και αφού

$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$, έχω $x_M = \frac{3\mu^2}{4}$. Αφού $M \in \varepsilon : y_M = \frac{2}{\mu}x_M + \frac{\mu}{2} = \frac{2}{\mu} \cdot \frac{3\mu^2}{4} + \frac{\mu}{2} = 2\mu$.

Άρα, $\begin{cases} x_M = \frac{3\mu^2}{4}, \ (4) \\ y_M = 2\mu, \ (5) \end{cases}$ *και απαλείφοντας την μεταβλητή* μ,

Θα προκύψει η εξίσωση της γραμμής στην οποία βρίσκεται το M.

Έχω $(5) : \mu = \frac{y_M}{2} \to (4) : x_M = \frac{3}{4} \cdot \frac{y_M^2}{4}$ ή $y_M^2 = \frac{16}{3}x_M$. Άρα, το M είναι σημείο της παραβολής $y^2 = \frac{16}{3}x$.