Προτάσεις που χρειάζονται απόδειξη
1ο Μέρος

Πρόταση

Έστω η συνάρτηση f: $A \to R$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα
Να δείξετε ότι
α) η f αντιστρέφεται
β) η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο f(A)
γ) Οι εξισώσεις $f(x) = f^{-1}(x)$ και $f(x) = x$ είναι ισοδύναμες στο σύνολο $A \cap f(A)$

απόδειξη

α) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα είναι και 1 – 1 η f αντιστρέφεται

β) Έστω ότι η f^{-1} δεν είναι γνησίως αύξουσα στο f(A)
Τότε υπάρχουν $y_1, y_2 \in f(A)$ τέτοια ώστε $y_1 < y_2$ και $f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$ δηλαδή
$f(x_1) < f(x_2)$ και $x_1 \geq x_2$ που είναι άτοπο αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο
Άρα η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο f(A)

γ)
Ευθύ : Έστω ότι το $x_o \in A \cap f(A)$ είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x) = f^{-1}(x)$

Θα δείξουμε ότι το x_o είναι ρίζα και της εξίσωσης $f(x) = x$ δηλαδή $f(x_o) = x_o$
Είναι $f(x_o) = f^{-1}(x_o)$ (1)

Έστω ότι $f(x_o) \neq x_o \Leftrightarrow f(x_o) < x_o$ ή $f(x_o) > x_o$
Αν $f(x_o) < x_o$ (2) τότε $f^{-1}(f(x_o)) < f^{-1}(x_o) \Leftrightarrow x_o < f^{-1}(x_o)$ από (1) , που είναι άτοπο από τη (2)

Αν $f(x_o) > x_o$ (3) τότε $f^{-1}(f(x_o)) > f^{-1}(x_o) \Leftrightarrow x_o > f^{-1}(x_o)$ από (1) , που είναι άτοπο από τη (3)
Δηλαδή $f(x_o) = x_o$

Αντίστροφα :
Έστω ότι το x_o $A \cap f(A)$ είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x) = x$ δηλαδή $f(x_o) = x_o$ τότε είναι $x_o = f^{-1}(x_o)$ Οπότε $f(x_o) = f^{-1}(x_o)$

Οι δοσμένες εξισώσεις έχουν τις ίδιες ακριβώς ρίζες , δηλαδή είναι ισοδύναμες

Πρόταση

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και 1 – 1 σε ένα διάστημα Δ , να δείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη

απόδειξη

Αρκεί να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$
με $\alpha < \beta < \gamma$ θα είναι ή $f(\alpha) < f(\beta) < f(\gamma)$ ή $f(\alpha) > f(\beta) > f(\gamma)$

Έστω ότι για $\alpha < \beta < \gamma$ είναι $f(\alpha) < f(\gamma) < f(\beta)$
Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha ,\beta]$
Είναι $f(\alpha) \neq f(\beta)$ και $f(\gamma) \in (f(\alpha) , f(\beta))$ από την (1)

Σύμφωνα με το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o \in (\alpha ,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_o) = f(\gamma)$ Επειδή η f είναι 1 – 1 θα είναι $x_o = \gamma$
Οπότε $\gamma \in (\alpha ,\beta)$ που είναι άτοπο αφού $\alpha < \beta < \gamma$.

Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε και στις περιπτώσεις που $f(\gamma) < f(\alpha) < f(\beta)$ ή $f(\beta) < f(\alpha) < f(\gamma)$ ή $f(\beta) < f(\gamma) < f(\alpha)$

Πρόταση

Έστω $f : R \to R$ μια συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$ τότε να δείξετε ότι η f είναι 1 – 1

απόδειξη

Έστω ότι η συνάρτηση f δεν είναι 1 – 1
Τότε θα υπάρχουν $x_1, x_2 \in R$ με $x_1 \neq x_2$ και $f(x_1) = f(x_2)$
Αν $x_1 < x_2$, τότε για την f ισχύουν οι υποθέσεις του θ. Rolle στο διάστημα $[x_1, x_2]$, αφού

- Είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ ως παραγωγίσιμη
- Είναι παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) και
- Ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$

  Άρα υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$, τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$, που είναι άτοπο, αφού $f'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in R$. Άρα η f είναι 1 – 1