ΟΡΙΣΜΟΣ

Τι λέμε ρυθμό μεταβολής του μεγέθους y ως προς το μέγεθος x για $x = x_0$, αν $y = f(x)$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση ;

Απάντηση :

Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x,y συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$, όταν f είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_0, τότε ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο x_0 την παράγωγο $f'(x_0)$.

Σχόλια :

- Ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας v ως προς το χρόνο t τη χρονική στιγμή t_0 είναι η παράγωγος $v'(t_0)$, της ταχύτητας v ως προς το χρόνο t τη χρονική στιγμή t_0. Η παράγωγος $v'(t_0)$ λέγεται επιτάχυνση του κινητού τη χρονική στιγμή t_0 και συμβολίζεται με $\alpha(t_0)$. Είναι δηλαδή : $\alpha(t_0) = v'(t_0) = S''(t_0)$.
- Στην οικονομία, το κόστος K, η είσπραξη E και το κέρδος P εκφράζονται συναρτήσει της ποσότητας x του παραγόμενου προϊόντος. Έτσι, η παράγωγος $\mathrm{K}'(x_0)$ παριστάνει το ρυθμό μεταβολής του κόστους K ως προς την ποσότητα x, όταν $x = x_0$ και λέγεται οριακό κόστος στο x_0. Ανάλογα, ορίζονται και οι έννοιες οριακή είσπραξη στο x_0 και οριακό κέρδος στο x_0.

<u>ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1</u> : ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΡΥΘΜΟΥ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

Για να επιλύσουμε προβλήματα σχετικά με ρυθμούς μεταβολής μεγεθών, κάνουμε τα εξής :

i. Πρώτα καταγράφουμε όλους τους αγνώστους, καθώς και τις σχέσεις που τους συνδέουν. Αν η σχέση που συνδέει τους αγνώστους δε δίνεται στην εκφώνηση, τότε την φτιάχνουμε μέσα από τα δεδομένα της εκφώνησης (είτε με σχήμα, είτε με τη λογική σκέψη).

ii. Έπειτα μετατρέπουμε τη σχέση που συνδέει τους αγνώστους σε συνάρτηση ως προς τον ανεξάρτητο άγνωστο.

iii. Υπολογίζουμε τις τιμές των αγνώστων όταν $x = x_0$ που ζητείται ο ρυθμός μεταβολής.

iv. Τέλος παραγωγίζουμε τη συνάρτηση που φτιάξαμε και με αντικατάσταση $x = x_0$ προκύπτει ο ζητούμενος ρυθμός μεταβολής.

Υπενθύμιση :

- Εμβαδόν σφαίρας : $E = 4\pi R^2$, Όγκος σφαίρας : $V = \frac{4}{3}\pi R^3$
- Εμβαδόν κώνου : $E = \pi R\lambda + \pi R^2$, Όγκος κώνου : $V = \frac{1}{3}\pi R^2 \upsilon$,
- Όγκος πυραμίδας : $V = \frac{1}{3}E_{\beta\acute{\alpha}\sigma\eta\varsigma} \cdot \upsilon$
- Ο ρυθμός μεταβολής της **ταχύτητας** v ως προς το χρόνο t τη χρονική στιγμή t_0 είναι η παράγωγος $v'(t_0)$, της ταχύτητας v ως προς το χρόνο t τη χρονική στιγμή t_0. Η παράγωγος $v'(t_0)$ λέγεται **επιτάχυνση** του κινητού τη χρονική στιγμή t_0 και συμβολίζεται με $\alpha(t_0)$. Είναι δηλαδή : $\alpha(t_0) = v'(t_0) = S''(t_0)$.
- Στην οικονομία, το κόστος K, η είσπραξη E και το κέρδος P εκφράζονται συναρτήσει της ποσότητας x του παραγόμενου προϊόντος (δηλ. $K(x), E(x), P(x)$). Έτσι, η παράγωγος $K'(x_0)$ παριστάνει το ρυθμό μεταβολής του κόστους K ως προς την ποσότητα x, όταν $x = x_0$ και λέγεται οριακό κόστος στο x_0. Ανάλογα, ορίζονται και οι έννοιες οριακή είσπραξη στο x_0 και οριακό κέρδος στο x_0. Η βασική σχέση που συνδέει τις συναρτήσεις $K(x), E(x), P(x)$ είναι $\boxed{P(x) = E(x) - K(x)}$. Το μέσο κόστος παραγωγής x μονάδων προϊόντος συμβολίζεται με $K_\mu(x)$ και είναι $\boxed{K_\mu(x) = \frac{K(x)}{x}}$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της απόστασης των σημείων Α(4,0) και Β(0,x) ως προς x, όταν x=3.

<u>Λύση :</u>

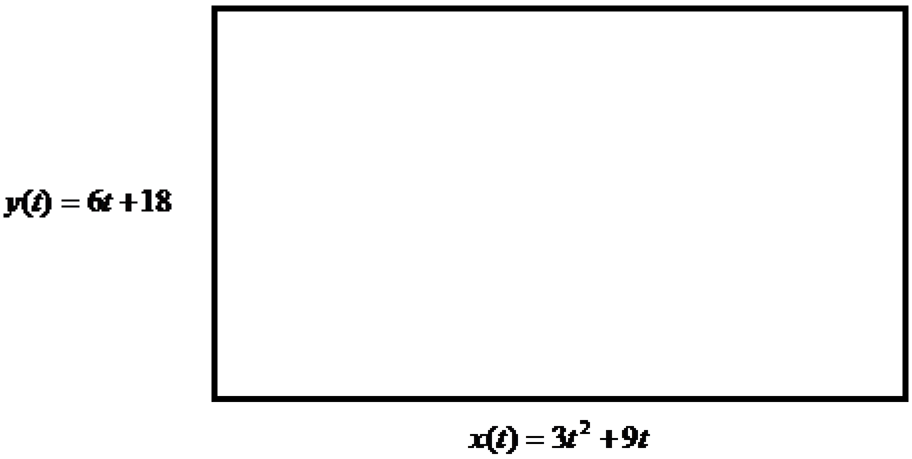
Η Απόσταση δυο σημείων $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ Δίνεται από τον τύπο : $(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Άρα $(AB) = \sqrt{(0-4)^2 + (x-0)^2} = \sqrt{16 + x^2}$

Άρα η συνάρτηση που δίνει την απόσταση (AB) ως προς x είναι $f(x) = \sqrt{16 + x^2}$ με $D_f = \Re$. Εδώ θέλω το ρυθμό μεταβολής της $f(x)$ όταν x=3, δηλ. το $f'(3)$. Βρίσκω πρώτα την $f'(x) = (\sqrt{16+x^2})' = \frac{1}{2\sqrt{16+x^2}} \cdot (16+x^2)' = \frac{2x}{2\sqrt{16+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{16+x^2}}$

Άρα $f'(3) = \frac{3}{\sqrt{16+9}} = \frac{3}{5}$

2) Δίνεται ορθογώνιο με διαστάσεις $x(t)=3t^2+9t$ και $y(t)=6t+18$, όπου t ο χρόνος σε sec. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του ορθογωνίου, τη χρονική στιγμή που γίνεται τετράγωνο.

<u>Λύση :</u>



$\mathrm{E}=x\cdot y$ άρα $\mathrm{E}(t)=x(t)\cdot y(t)=(3t^2+9t)(6t+18)=18t^3+54t^2+54t^2+162t=$
$=18t^3+108t^2+162t$

Τη χρονική στιγμή που το ορθογώνιο γίνεται τετράγωνο θα ισχύει $x(t)=y(t) \Leftrightarrow 3t^2+9t=6t+18 \Leftrightarrow 3t^2+3t-18=0 \Leftrightarrow t^2+t-6=0 \Leftrightarrow t=2, ή, t=-3$ απορ.

Η συνάρτηση του εμβαδού είναι $\mathrm{E}(t)=18t^3+108t^2+162t$. Εδώ θέλω το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του ορθογωνίου, τη χρονική στιγμή που γίνεται τετράγωνο δηλ. το $\mathrm{E}'(2)$. Βρίσκω πρώτα $\mathrm{E}'(t)=54t^2+216t+162$. Άρα $\mathrm{E}'(2)=54\cdot 2^2+216\cdot 2+162=810$ τετραγωνικές μονάδες/sec.

3) Η θέση ενός υλικού σημείου, το οποίο εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση δίνεται από τον τύπο $x=x(t)=t^3-6t^2+9t$, όπου το *t* μετριέται σε δευτερόλεπτα και το *x* σε μέτρα.

i. Να βρεθεί η ταχύτητα του σημείου σε χρόνο *t*.
ii. Ποια είναι η ταχύτητα του σημείου σε χρόνο 2 s και ποια σε χρόνο 4 s;
iii. Πότε το σημείο είναι (στιγμιαία) ακίνητο;
iv. Πότε το σημείο κινείται στη θετική κατεύθυνση και πότε στην αρνητική κατεύθυνση;
v. Να βρεθεί το ολικό διάστημα που έχει διανύσει το σημείο στη διάρκεια των πρώτων 5 s.

<u>Λύση :</u>

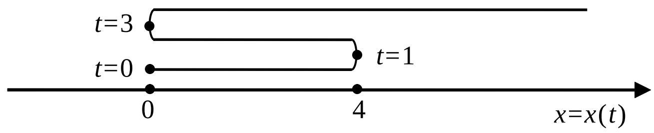
i. Η ταχύτητα είναι : $\upsilon(t)=x'(t)=(t^3-6t^2+9t)'=3t^2-12t+9$.

ii. Η ταχύτητα του σημείου σε χρόνο $t=2s$ είναι $\upsilon(2)=3\cdot 2^2-12\cdot 2+9=-3\,\mathrm{m/s}$ και σε χρόνο $t=4s$ είναι $\upsilon(4)=3\cdot 4^2-12\cdot 4+9=9\,\mathrm{m/s}$.

iii. Το σημείο είναι ακίνητο, όταν $\upsilon(t)=0 \Leftrightarrow 3t^2-12t+9=0 \Leftrightarrow t^2-4t+3=0 \Leftrightarrow t=1$ ή $t=3$.
Άρα, το σημείο είναι ακίνητο ύστερα από 1 s και ύστερα από 3 s.

iv. Το σημείο κινείται στη θετική κατεύθυνση, όταν
$\upsilon(t)>0 \Leftrightarrow 3t^2-12t+9>0 \Leftrightarrow t^2-4t+3>0 \Leftrightarrow (t-1)(t-3)>0 \Leftrightarrow t<1$ ή $t>3$.
Άρα, το σημείο κινείται στη θετική κατεύθυνση στα χρονικά διαστήματα $t<1$ και $t>3$ (και στην αρνητική κατεύθυνση όταν $1<t<3$).

Σχηματικά η κίνηση του υλικού σημείου μπορεί να παρασταθεί ως εξής:



v.Η απόσταση που διανύθηκε από το κινούμενο σημείο είναι:

- Στη διάρκεια του πρώτου δευτερόλεπτου $S_1 = |x(1)-x(0)| = |4-0| = 4\,\text{m}$.
- Από $t=1$ μέχρι $t=3$ $\quad S_2 = |x(3)-x(1)| = |0-4| = 4\,\text{m}$
- Από $t=3$ μέχρι $t=5$ $\quad S_3 = |x(5)-x(3)| = |20-0| = 20\,\text{m}$

Άρα, το ολικό διάστημα *S* που διάνυσε το σημείο σε χρόνο 5s είναι

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = 4+4+20 = 28\,\text{m}.$$

4) Μια σφαιρική μπάλα χιονιού αρχίζει να λιώνει. Η ακτίνα της, που ελαττώνεται, δίνεται σε cm από τον τύπο $r = 4 - t^2$, όπου *t* ο χρόνος σε sec. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της επιφάνειας *E* και του όγκου *V* της μπάλας, όταν $t=1$sec. (Θυμηθείτε ότι $E = 4\pi r^2$ και $V = \frac{4}{3}\pi r^3$). *(Ασκ. 1 A΄ ομάδας σελ. 125 σχολικό)*

<u>Λύση :</u> Επειδή $\mathrm{E} = 4\pi r^2$ και η ακτίνα r μεταβάλλεται συναρτήσει του χρόνου t, έχουμε :

$\mathrm{E}(t) = 4\pi r^2(t)$ και $r(t) = 4 - t^2$.

$\mathrm{E}'(t) = 8\pi r(t)\cdot r'(t)$ με $r'(t) = -2t$.

Έτσι : $\mathrm{E}'(1) = 8\pi r(1)\cdot r'(1) = 8\pi\cdot 3\cdot(-2) = -48\pi \ \ cm^2/s$

Ομοίως $V(t) = \frac{4}{3}\pi r^3(t)$, $V'(t) = 4\pi r^2(t)\cdot r'(t)$

Έτσι : $V'(1) = 4\pi r^2(1)\cdot r'(1) = 4\pi\cdot 9\cdot(-2) = -72\pi \ \ cm^3/s$

5) Αν η επιφάνεια μιας σφαίρας αυξάνεται με ρυθμό 10cm^2/sec, να βρείτε το ρυθμό με τον οποίο αυξάνεται ο όγκος αυτής όταν $r = 85$ cm.

(Ασκ. 1 Β΄ ομάδας σελ. 126 σχολικό)

<u>Λύση :</u> Είναι $r = r(t)$ η ακτίνα της σφαίρας ως συνάρτηση του χρόνου t.

Η επιφάνεια της σφαίρας είναι $\mathrm{E}(t) = 4\pi r^2(t)$ και ο όγκος $V(t) = \frac{4}{3}\pi r^3(t)$.

Οπότε : $\mathrm{E}'(t) = 8\pi r(t)\cdot r'(t)$ και $V'(t) = 4\pi r^2(t)\cdot r'(t)$.

Τη χρονική στιγμή t_0 η επιφάνεια μιας σφαίρας αυξάνεται με ρυθμό 10cm^2/sec δηλ. $\mathrm{E}'(t_0) = +10 \ \ cm^2/s$ και η ακτίνα της είναι $r(t_0) = 85 \ \ cm$.

Άρα

$$\mathrm{E}'(t_0) = +10 \ \ cm^2/s \Leftrightarrow 8\pi r(t_0)\cdot r'(t_0) = 10 \Leftrightarrow 8\pi\cdot 85\cdot r'(t_0) = 10 \Leftrightarrow r'(t_0) = \frac{1}{68\pi}\,cm/s$$

Έτσι : $V'(t_0) = 4\pi r^2(t_0)\cdot r'(t_0) = 4\pi\cdot 85^2\cdot\frac{1}{68\pi} = 425\,cm^3/s$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : ΚΙΝΗΣΗ ΣΗΜΕΙΟΥ ΣΕ ΚΑΜΠΥΛΗ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

6) Ένα κινητό Μ ξεκινά από την αρχή των αξόνων και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=\frac{1}{4}x^2$, $x\geq 0$. Σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης x του Μ είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του y, αν υποτεθεί ότι $x'(t)>0$ για κάθε $t\geq 0$. *(Ασκ. 5 Α΄ ομάδας σελ. 126 σχολικό)*

<u>Λύση :</u> Έστω $\mathrm{M}(x,y)$ σημείο της καμπύλης $y=\frac{1}{4}x^2$. Επειδή η τετμημενη και η τεταγμένη του σημείου Μ μεταβάλλονται συναρτήσει του χρόνου t είναι $x=x(t),\, y=y(t)$ με $y(t)=\frac{1}{4}x^2(t)$

Ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης *x* του Μ είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του *y* άρα : $x'(t)=y'(t)\Leftrightarrow x'(t)=\left(\frac{1}{4}x^2(t)\right)'\Leftrightarrow x'(t)=\frac{1}{2}x(t)\cdot x'(t)\overset{x'(t)>0}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow 1=\frac{1}{2}x(t)\Leftrightarrow x(t)=2$. Και $y(t)=\frac{1}{4}x^2(t)\Leftrightarrow y(t)=\frac{1}{4}2^2\Leftrightarrow y(t)=1$. Δηλ. $\mathrm{M}(2{,}1)$

7) Ένα κινητό κινείται σε κυκλική τροχιά με εξίσωση $x^2+y^2=1$. Καθώς περνάει από το σημείο $\mathrm{A}\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, η τεταγμένη y ελαττώνεται με ρυθμό 3 μονάδες το δευτερόλεπτο. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης x τη χρονική στιγμή που το κινητό περνάει από το Α. *(Ασκ. 8 Β΄ ομάδας σελ. 127 σχολικό)*

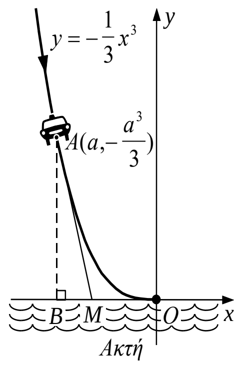
<u>Λύση :</u> Έστω $x=x(t),\, y=y(t)$ οι συντεταγμένες του κινητού, την τυχαία χρονική στιγμή t.

Τη χρονική στιγμή t_0 που το κινητό βρίσκεται στη θέση $\mathrm{A}\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ είναι $\boxed{x(t_0)=\frac{1}{2},\;\; y(t_0)=\frac{\sqrt{3}}{2}}$. Επίσης $\boxed{y'(t_0)=-3}$. Όμως το κινητό κινείται στον κύκλο $x^2+y^2=1$ δηλ. $x^2(t)+y^2(t)=1$. Παραγωγιζοντας και τα δυο μέλη έχουμε : $\left(x^2(t)+y^2(t)\right)'=0\Leftrightarrow 2x(t)\cdot x'(t)+2y(t)\cdot y'(t)=0$ (1)

Έτσι η (1) για $t=t_0$ γίνεται : $2x(t_0)\cdot x'(t_0)+2y(t_0)\cdot y'(t_0)=0\Leftrightarrow 2\frac{1}{2}\cdot x'(t_0)+2\frac{\sqrt{3}}{2}(-3)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x'(t_0)=3\sqrt{3}\ \mu o\nu\acute{\alpha}\delta\varepsilon\varsigma/s$.

8) Ένα περιπολικό Α κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=-\frac{1}{3}x^3$, $x\le 0$ πλησιάζοντας την ακτή και ο προβολέας του φωτίζει κατευθείαν εμπρός (Σχήμα). Αν ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του περιπολικού δίνεται από τον τύπο $\alpha'(t)=-\alpha(t)$ να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου Μ της ακτής στο οποίο πέφτουν τα φώτα του προβολέα τη χρονική στιγμή κατά την οποία το περιπολικό έχει τετμημένη -3. *(Ασκ. 6 Β΄ ομάδας σελ. 127 σχολικό)*



<u>Λύση :</u>

Ο προβολέας του περιπολικού φωτίζει κατά τη διεύθυνση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $\mathrm{A}\left(\alpha,-\frac{\alpha^3}{3}\right)$, καθώς αυτό κινείται κατά μήκος της καμπύλης. Είναι $y=f(x)=-\frac{1}{3}x^3$, $x\le 0$ με $f'(x)=-x^2$. Έστω (ε) η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $\mathrm{A}\left(\alpha,-\frac{\alpha^3}{3}\right)$ τότε $(\varepsilon): y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha)\Leftrightarrow(\varepsilon): y+\frac{\alpha^3}{3}=-\alpha^2(x-\alpha)\Leftrightarrow\Leftrightarrow(\varepsilon): y=-\alpha^2x+\frac{2\alpha^3}{3}$. Το σημείο Μ είναι το σημείο που η εφαπτομένη τέμνει τον x΄x. Έτσι : $(\varepsilon)\overset{y=0}{\Leftrightarrow}0=-\alpha^2x+\frac{2\alpha^3}{3}\Leftrightarrow 3\alpha^2x=2\alpha^3\overset{\alpha\neq 0}{\Leftrightarrow}x=\frac{2\alpha}{3}$. Άρα το σημείο Μ έχει τετμημενη $x(t)=\frac{2\alpha(t)}{3}$, έτσι $x'(t)=\frac{2\alpha'(t)}{3}=-\frac{2\alpha(t)}{3}$, όμως τη χρονική στιγμή t_0 το περιπολικό, δηλ το σημείο Α, έχει τετμημενη -3 άρα $\alpha(t_0)=-3$. Τελικά $x'(t_0)=-\frac{2\alpha(t_0)}{3}=-\frac{2(-3)}{3}=2\ \frac{\mu o\nu.\ \mu\acute{\eta}\kappa o\upsilon\varsigma}{\mu o\nu.\ \chi\rho\acute{o}\nu o\upsilon}$.

9) Ένα υλικό σημείο $\mathrm{M}(x,y)$ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $C: y=e^x+x^3+1$, με $x=x(t),\ y=y(t)\quad t\ge 0$. Τη χρονική στιγμή t_0 που το Μ περνάει από το σημείο $\mathrm{A}(0,2)$ η τετμημένη του αυξάνει με ρυθμό 2 μονάδες/sec. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της απόστασης $l=(\mathrm{OM})$ τη χρονική στιγμή που το κινητό περνάει από το Α.

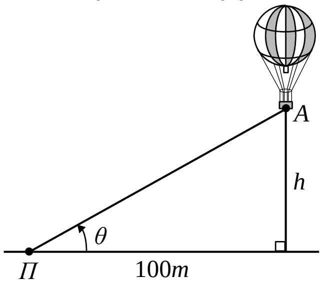
<u>Λύση :</u>

Έστω $x=x(t),\ y=y(t)$ οι συντεταγμένες του σημείου Μ. Ισχύει ότι $y(t)=e^{x(t)}+x^3(t)+1$.
Τη χρονική στιγμή t_0 το Μ παίρνει από το $\mathrm{A}(0,2)$, άρα :
$\boxed{x(t_0)=0,\ \ y(t_0)=2}$ και από εκφώνηση $\boxed{x'(t_0)=2\ \mu o\nu./s}$. Επίσης :
$(\mathrm{OM})=l=\sqrt{x^2+y^2}\Rightarrow l^2=x^2+y^2$. Όμως η απόσταση $l=(\mathrm{OM})$ είναι συνάρτηση του χρόνου t, έτσι έχω : $l^2(t)=x^2(t)+y^2(t)$ (1).
Παραγωγίζοντας και τα δυο μέλη της (1) έχω : $2l(t)\cdot l'(t)=2x(t)\cdot x'(t)+2y(t)\cdot y'(t)$ (2).
Επίσης η (1) για $t=t_0$ γίνεται : $l^2(t_0)=x^2(t_0)+y^2(t_0)\Leftrightarrow l^2(t_0)=4\Leftrightarrow\boxed{l(t_0)=2}$.
Ακόμα : $y'(t)=\left(e^{x(t)}+x^3(t)+1\right)'=e^{x(t)}\cdot x'(t)+3x^2(t)\cdot x'(t)$,
Δηλαδή : $y'(t_0)=e^{x(t_0)}\cdot x'(t_0)+3x^2(t_0)\cdot x'(t_0)=e^0\cdot 2+3\cdot 0^2\cdot 2=2\Leftrightarrow\boxed{y'(t_0)=2}$.
Τελικά η (2) για $t=t_0$ γίνεται : $2l(t_0)\cdot l'(t_0)=2x(t_0)\cdot x'(t_0)+2y(t_0)\cdot y'(t_0)\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2\cdot 2l'(t_0)=2\cdot 0\cdot 2+2\cdot 2\cdot 2\Leftrightarrow 4l'(t_0)=8\Leftrightarrow l'(t_0)=2\ \mu o\nu./s$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 : ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ ΓΩΝΙΑΣ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

10) Ένα αερόστατο Α αφήνει το έδαφος σε απόσταση 100m από έναν παρατηρητή Π με ταχύτητα 50m/min. Με ποιο ρυθμό αυξάνεται η γωνία θ που σχηματίζει η ΑΠ με το έδαφος τη χρονική στιγμή κατά την οποία το μπαλόνι βρίσκεται σε ύψος 100m.



(Ασκ. 4 Β΄ ομάδας σελ. 126 σχολικό)

Λύση :

Το ύψος h και η γωνία θ μεταβάλλονται ως συνάρτηση του χρόνου t.

Έτσι : $h = h(t)$ και $\theta = \theta(t)$. Τη χρονική στιγμή t_0 από δεδομένα έχουμε :

$\boxed{h(t_0) = 100m}$ και $\boxed{h'(t_0) = 50m/\min}$. Το τρίγωνο του σχήματος είναι ορθογώνιο έτσι : $\varepsilon\phi\theta = \dfrac{\alpha\pi.\,\kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\tau\eta}{\pi\rho o\sigma\kappa.\,\kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\tau\eta} = \dfrac{h}{100} \Rightarrow \varepsilon\phi\theta(t) = \dfrac{h(t)}{100}$. Παραγωγίζοντας την ισότητα έχουμε :

$$\left(\varepsilon\phi\theta(t)\right)' = \left(\frac{h(t)}{100}\right)' \Leftrightarrow \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)}\cdot\theta'(t) = \frac{1}{100}\cdot h'(t) \Leftrightarrow \frac{\eta\mu^2\theta(t)+\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)}\cdot\theta'(t) = \frac{1}{100}\cdot h'(t) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\eta\mu^2\theta(t)}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)}+1\right)\cdot\theta'(t) = \frac{1}{100}\cdot h'(t) \Leftrightarrow \left(\varepsilon\phi^2\theta(t)+1\right)\cdot\theta'(t) = \frac{1}{100}\cdot h'(t) \quad (1)$$

Η (1) για $t = t_0$ γίνεται : $\left(\varepsilon\phi^2\theta(t_0)+1\right)\cdot\theta'(t_0) = \dfrac{1}{100}\cdot h'(t_0)$ (2)

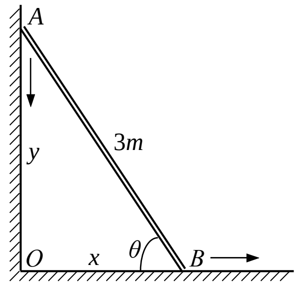
Όμως $\varepsilon\phi\theta(t_0) = \dfrac{h(t_0)}{100} = \dfrac{100}{100} = 1$.

Άρα η (2) γίνεται :

$$\left(\varepsilon\phi^2\theta(t_0)+1\right)\cdot\theta'(t_0) = \frac{1}{100}\cdot h'(t_0) \Leftrightarrow (1^2+1)\cdot\theta'(t_0) = \frac{50}{100} \Leftrightarrow \theta'(t_0) = \frac{1}{4}\,rad/\min.$$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 : ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΣΚΑΛΑΣ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :



11) Μία σκάλα μήκους 3m είναι τοποθετημένη σ' έναν τοίχο. Το κάτω μέρος της σκάλας γλιστρά στο δάπεδο με ρυθμό 0,1m/sec. Τη χρονική στιγμή t_0, που η κορυφή της σκάλας απέχει από το δάπεδο 2,5m, να βρείτε:
   i. Την ταχύτητα με την οποία πέφτει η κορυφή A της σκάλας.
   ii. Το ρυθμό μεταβολής της γωνίας θ (Σχήμα).

(Ασκ. 7 Β΄ ομάδας σελ. 127 σχολικό)

Λύση :

i. Τα μεγέθη x, y, θ είναι συναρτήσεις του χρόνου t έτσι : $x = x(t),\ y = y(t),\ \theta = \theta(t)$.
Από δεδομένα έχουμε ότι τη χρονική στιγμή t_0 είναι $\boxed{x'(t_0) = 0{,}1 m/s}$, $\boxed{y(t_0) = 2{,}5m}$.
Ψάχνουμε την ταχύτητα με την οποία πέφτει η κορυφή A της σκάλας δηλ. το $y'(t_0)$.
Επειδή το τρίγωνο του σχήματος είναι ορθογώνιο έχουμε :
$x^2 + y^2 = 3^3 \Rightarrow x^2(t) + y^2(t) = 9$ (1)
Επίσης $x^2(t) + y^2(t) = 9 \overset{t=t_0}{\Leftrightarrow} x^2(t_0) + y^2(t_0) = 9 \Leftrightarrow x^2(t_0) + 6{,}25 = 9 \Leftrightarrow \boxed{x(t_0) = \sqrt{2{,}75}m}$.
Παραγωγίζοντας την ισότητα (1) έχουμε : $2x(t)\cdot x'(t) + 2y(t)\cdot y'(t) = 0$ (2)
Η (2) για $t = t_0$ γίνεται :

$$2x(t_0)\cdot x'(t_0) + 2y(t_0)\cdot y'(t_0) = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{2{,}75}\cdot 0{,}1 + 2\cdot 2{,}5\cdot y'(t_0) = 0 \Leftrightarrow \boxed{y'(t_0) = -\frac{\sqrt{2{,}75}}{25}\ m/s}.$$

ii. Είναι $\varepsilon\phi\theta = \dfrac{\alpha\pi.\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\tau\eta}{\pi\rho o\sigma\kappa.\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\tau\eta} = \dfrac{y}{x} \Rightarrow \varepsilon\phi\theta(t) = \dfrac{y(t)}{x(t)}$. Παραγωγίζοντας την ισότητα έχουμε :

$$(\varepsilon\phi\theta(t))' = \left(\frac{y(t)}{x(t)}\right)' \Leftrightarrow \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)}\cdot\theta'(t) = \frac{y'(t)x(t) - y(t)x'(t)}{x^2(t)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\eta\mu^2\theta(t) + \sigma\upsilon\nu^2\theta(t)}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)}\cdot\theta'(t) = \frac{y'(t)x(t) - y(t)x'(t)}{x^2(t)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\eta\mu^2\theta(t)}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)} + 1\right)\cdot\theta'(t) = \frac{y'(t)x(t) - y(t)x'(t)}{x^2(t)} \Leftrightarrow \left(\varepsilon\phi^2\theta(t) + 1\right)\cdot\theta'(t) = \frac{y'(t)x(t) - y(t)x'(t)}{x^2(t)} \quad (3)$$

Η (3) για $t = t_0$ γίνεται : $\left(\varepsilon\phi^2\theta(t_0) + 1\right)\cdot\theta'(t_0) = \dfrac{y'(t_0)x(t_0) - y(t_0)x'(t_0)}{x^2(t_0)}$ (4)

Όμως $\varepsilon\phi\theta(t_0) = \dfrac{y(t_0)}{x(t_0)} = \dfrac{2{,}5}{\sqrt{2{,}75}}$.

Άρα η (4) γίνεται : $\left(\varepsilon\phi^2\theta(t_0) + 1\right)\cdot\theta'(t_0) = \dfrac{y'(t_0)x(t_0) - y(t_0)x'(t_0)}{x^2(t_0)} \Leftrightarrow$

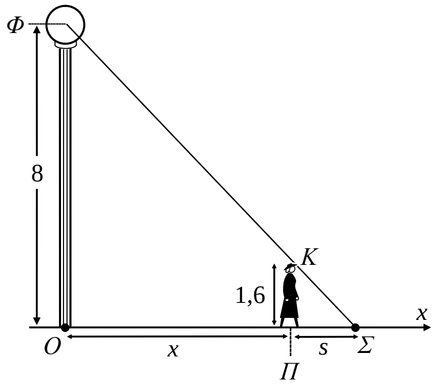
$$\Leftrightarrow \left(\frac{6{,}25}{2{,}75} + 1\right)\cdot\theta'(t_0) = \frac{-\dfrac{\sqrt{2{,}75}}{25}\cdot\sqrt{2{,}75} - 2{,}5\cdot 0{,}1}{2{,}75} \Leftrightarrow \frac{9}{2{,}75}\theta'(t_0) = \frac{-\dfrac{2{,}75}{25} - 0{,}25}{2{,}75} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9\theta'(t_0) = -0{,}36 \Leftrightarrow \theta'(t_0) = -0{,}04\ rad/s.$$

<u>ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 5</u> : ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΣΚΙΑΣ

<u>ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u> :

12) Μία γυναίκα ύψους 1,60m απομακρύνεται από τη βάση ενός φανοστάτη ύψους 8m με ταχύτητα 0,8m/s. Με ποια ταχύτητα αυξάνεται ο ίσκιος της;



(Ασκ. 5 Β΄ ομάδας σελ. 126 σχολικό)

<u>Λύση :</u>

Επειδή τα τρίγωνα ΦΟΣ και ΚΠΣ είναι όμοια ισχύει : $\dfrac{\text{ΚΠ}}{\text{ΦΟ}} = \dfrac{\text{ΠΣ}}{\text{ΟΣ}} \Leftrightarrow \dfrac{1{,}6}{8} = \dfrac{s}{x+s} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{5} = \dfrac{s}{x+s} \Leftrightarrow 5s = x + s \Leftrightarrow 4s = x \Leftrightarrow s = \dfrac{1}{4}x$ (1)

Τα μεγέθη x, s είναι συναρτήσεις του χρόνου t έτσι : $x = x(t), s = s(t)$, $x'(t) = 0{,}8\ m/s$ και ψάχνουμε το $s'(t)$ που είναι η ταχύτητα με την οποία αυξάνει ο ίσκιος της.

Η (1) γίνεται $s(t) = \dfrac{1}{4}x(t)$ άρα $s'(t) = \dfrac{1}{4}x'(t) \Leftrightarrow s'(t) = \dfrac{1}{4}0{,}8 \Leftrightarrow s'(t) = 0{,}2\ m/s$.

<u>ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 6</u> : ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ

<u>ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u> :

13) Αν το συνολικό κόστος παραγωγής x μονάδων ενός προϊόντος είναι $\text{K}(x)$ και η συνολική είσπραξη είναι $\text{E}(x)$, τότε το συνολικό κέρδος είναι $\text{P}(x) = \text{E}(x) - \text{K}(x)$ και το μέσο κόστος είναι $\text{K}_{\mu}(x) = \dfrac{\text{K}(x)}{x}$.

i. Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους μηδενίζεται όταν ο ρυθμός μεταβολής του κόστους είναι ισος με το ρυθμό μεταβολής της είσπραξης.

ii. Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής του μέσου κόστους μηδενίζεται όταν το μέσο κόστος είναι ισο με το οριακό κόστος.

<u>Λύση :</u>

i. Ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους είναι $\text{P}'(x) = \text{E}'(x) - \text{K}'(x)$.

Άρα $\text{P}'(x) = 0 \Leftrightarrow \text{E}'(x) - \text{K}'(x) = 0 \Leftrightarrow \text{E}'(x) = \text{K}'(x)$

ii. Ο ρυθμός μεταβολής του μέσου κόστους είναι $\text{K}'_{\mu}(x) = \left(\dfrac{\text{K}(x)}{x}\right)' = \dfrac{\text{K}'(x)\cdot x - \text{K}(x)}{x^2}$

Άρα $\text{K}'_{\mu}(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\text{K}'(x)\cdot x - \text{K}(x)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \text{K}'(x)\cdot x - \text{K}(x) = 0 \Leftrightarrow \text{K}'(x) = \dfrac{\text{K}(x)}{x} \Leftrightarrow \text{K}'(x) = \text{K}_{\mu}(x)$.

14) Ένα εργοστάσιο για την κατασκευή x χιλιάδων μονάδων ενός προϊόντος έχει κόστος $\mathrm{K}(x)=\frac{1}{3}x^3-60x^2+100x+4$ χιλ. ευρώ. Η είσπραξη από την πώληση των προϊόντων δίνεται από τον τύπο : $\mathrm{E}(x)=-x^3+30x^2-1700x-2$ χιλ. ευρώ. Να βρείτε πότε ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους είναι θετικός.

Λύση :

Το κέρδος $\mathrm{P}(x)$ του εργοστασίου δίνεται από τον τύπο $\mathrm{P}(x)=\mathrm{E}(x)-\mathrm{K}(x)\Leftrightarrow$

$$\mathrm{P}(x)=-x^3+30x^2-1700x-2-\frac{1}{3}x^3+60x^2-100x-4\Leftrightarrow \mathrm{P}(x)=-\frac{4}{3}x^3+90x^2-1800x-6$$

Οπότε : $\mathrm{P}'(x)=-4x^2+180x-1800$

Ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους είναι θετικός όταν : $\mathrm{P}'(x)>0\Leftrightarrow -4x^2+180x-1800>0\Leftrightarrow$ $-x^2+45x-450>0\Leftrightarrow x\in(15,30)$.