



Συνδυαστική άσκηση μέχρι τις συνέπειες του Θεωρήματος Bolzano

ΘΕΜΑ Δ

Έστω συνεχής συνάρτηση $f: (0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f^2(x) - 2f(x) \ln x = 1 - x - \ln^2 x$, $x \in (0,1]$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\left(f\left(\frac{1}{e}\right) + 1 \right) x^3 + 5x - 2019 \right] = +\infty$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln x - \sqrt{1-x}$, $x \in (0,1]$.

Δ2. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και ότι η f^{-1} έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $(-\infty, 0]$.

Δ3. Να βρείτε τη μικρότερη τιμή της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση

$$\ln x - \sqrt{1-x} = 1 - \lambda + e^{2-\lambda}$$

να έχει λύση στο διάστημα $(0,1]$.

Αν θεωρήσουμε γνωστό ότι η f^{-1} είναι συνεχής, τότε:

Δ4. Να υπολογιστούν τα όρια:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f^{-1}(x) - x}{x + f^{-1}(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}} f^2(x) \eta \mu \frac{1}{f(x)}$$

Δ5. Να λυθεί η ανίσωση: $f^{-1}(x) + f(x + 1) \leq 1 - x$.

ΕΥΤΥΧΙΣΜΕΝΟΣ Ο ΚΑΙΝΟΥΡΙΟΣ ΧΡΟΝΟΣ ΚΑΙ ΝΑ ΣΑΣ ΦΕΡΕΙ ΜΟΝΟ ΕΠΙΤΥΧΙΕΣ!!!

Φροντιστήρια Βακάνη