ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)

ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 20 ΜΑΪΟΥ 2016

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ(4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν A και A' είναι δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω να αποδείξετε ότι για τις πιθανότητές τους ισχύει:

$$P(A') = 1 - P(A).$$

Μονάδες 7

Α2. Να δώσετε τον ορισμό της διαμέσου (δ) ενός δείγματος ν παρατηρήσεων.

Μονάδες 4

Α3. Έστω f μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Α. Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0 \in A$;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Αν Α και Β είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $A \subseteq B$, τότε για τις πιθανότητές τους ισχύει $P(A) \le P(B)$.

β) Ο σταθμισμένος αριθμητικός μέσος ή σταθμικός μέσος είναι μέτρο διασποράς.

γ) Αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες, τότε ισχύει ότι:

$$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

δ) Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποιοτικής μεταβλητής.

ε) Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{5}{2}x^2+6x-1,\ x\in\mathbb{R}$.

Β1. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f.

Μονάδες 9

Β2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $A(0,f(0))$.

Μονάδες 8

Β3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to -1}\frac{f'(x)-12}{x+1}$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Μεταξύ των οικογενειών με τρία παιδιά επιλέγουμε τυχαία μία οικογένεια και εξετάζουμε τα παιδιά της ως προς το φύλο και ως προς τη σειρά γέννησής τους.

Γ1. Να προσδιορίσετε το δειγματικό χώρο Ω του πειράματος χρησιμοποιώντας ένα δενδροδιάγραμμα.

Μονάδες 4

Γ2. Να παρασταθούν με αναγραφή των στοιχείων τους τα ενδεχόμενα που προσδιορίζονται από την αντίστοιχη ιδιότητα:

Α: «το πρώτο παιδί είναι κορίτσι»

Β: «ο αριθμός των κοριτσιών υπερβαίνει τον αριθμό των αγοριών»

Γ: «τα δύο πρώτα παιδιά είναι του ίδιου φύλου».

Μονάδες 6

Γ3. Υποθέτουμε ότι ο δειγματικός χώρος Ω αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα.

α) Να υπολογίσετε την πιθανότητα των παρακάτω ενδεχομένων:

$$\Delta=A\cap B,\quad E=A\cup B,\quad Z=\Gamma-E.$$

(μονάδες 9)

β) Να υπολογίσετε την πιθανότητα των παρακάτω ενδεχομένων:

Η: «δεν πραγματοποιείται κανένα από τα Α,Β»

Θ: «πραγματοποιείται ακριβώς ένα από τα Α,Β».

(μονάδες 6)

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Δ

Οι χρόνοι (σε λεπτά) που χρειάστηκαν ν υπολογιστές για να τρέξουν ένα πρόγραμμα, έχουν ομαδοποιηθεί σε 4 ισοπλατείς κλάσεις πλάτους c, όπως στον παρακάτω πίνακα:

Χρόνος (σε λεπτά)	Κεντρική Τιμή x_i	Συχνότητα v_i
[8 ,)		20
[,)	14	15
[,)		10
[,)		v_4
ΣΥΝΟΛΟ		ν=.....

Δ1. Να αποδείξετε ότι $c=4$.

Μονάδες 4

Δ2. Αν η μέση τιμή των χρόνων είναι $\bar{x}=14$, να αποδείξετε ότι $v_4=5$ (μονάδες 4) και στη συνέχεια να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα κατάλληλα συμπληρωμένο (μονάδες 2).

Μονάδες 6

Δ3. Αν οι παρατηρήσεις είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες σε κάθε κλάση, να βρείτε πόσοι υπολογιστές χρειάστηκαν τουλάχιστον 9 λεπτά για να τρέξουν το πρόγραμμα.

Μονάδες 5

Δ4. Να αποδείξετε ότι η τυπική απόκλιση των χρόνων είναι s=4 και να εξετάσετε αν το δείγμα των χρόνων είναι ομοιογενές.

Μονάδες 6

Δ5. Αντικαθιστούμε τον επεξεργαστή κάθε υπολογιστή με έναν ταχύτερο και βρίσκουμε ότι κάθε υπολογιστής τρέχει τώρα το πρόγραμμα στο 80% του χρόνου που χρειαζόταν πριν. Να εξετάσετε ως προς την ομοιογένεια το καινούργιο δείγμα χρόνων.

Μονάδες 4

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. **Στο εξώφυλλο** να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας, να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.30 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΒΑΚΑΛΗΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ
ΑΠΟ ΤΟ 1967

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2016

ΒΑΚΑΛΗΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 150-151

Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 87

Α3. Σχολικό βιβλίο σελ. 14

Α4. **Α)** Σωστό

Β) Λάθος

Γ) Σωστό

Δ) Σωστό

Ε) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1.

$$f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{5}{2}x^2+6x-1, x\epsilon\mathbb{R}.$$

$H\ f\ ειναι\ παραγωγίσιμη\ ως\ πολυωνυμική\ με\ f'(x)=x^2-5x+6$

$$f'(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=2 \quad ή \quad x=3$$

x	-∞	2	3
		+∞	
$f'(x)$	+	−	+
f	γν. αύξουσα	γν. φθίνουσα	γν. αύξουσα

$$H\ f\ είναι\ γνησίως\ αύξουσα\ για\ x\epsilon(-\infty,2]$$

$$H\ f\ είναι\ γνησίως\ φθίνουσα\ για\ x\epsilon[2,3]$$

$$H\ f\ είναι\ γνησίως\ αύξουσα\ για\ x\epsilon[3,+\infty)$$

$$H\ f\ παρουσιάζει\ τοπικό\ μέγιστο\ για\ x=2\ το\ f(2)=\frac{11}{3}$$

$$H\ f\ παρουσιάζει\ τοπικό\ ελάχιστο\ για\ x=3\ το\ f(3)=\frac{7}{2}$$

B2.

$$f(0)=-1$$

$$f'(0)=6$$

$$Έστω\ \varepsilon: y=\alpha x+\beta\ η\ εξίσωση\ της\ εφαπτομένης\ της\ γραφικής\ παράστασης$$

$$της\ f\ στο\ A(0,-1).$$

$$Τότε\ \alpha=f'(0)=6\ \ άρα\ \ \varepsilon: y=6x+\beta$$

$$και\ \ A(0,-1)\ \epsilon\ \varepsilon\ \ \Leftrightarrow\ \ -1=6\cdot 0+\beta$$

$$Άρα\ \ \varepsilon:\ y=6x-1$$

B3.

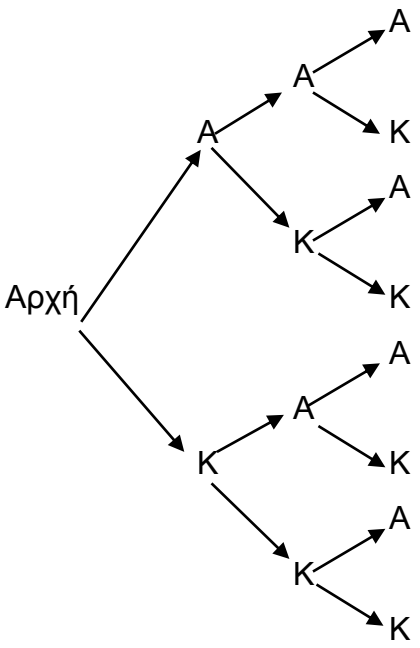
$$\lim_{x\to-1}\frac{f'(x)-12}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{x^2-5x+6-12}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{x^2-5x-6}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x-6)}{x+1}$$

$$=-7$$

ΒΑΚΑΛΗΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.



Ω = {ΑΑΑ , ΑΑΚ , ΑΚΑ , ΑΚΚ , ΚΑΑ , ΚΑΚ , ΚΚΑ , ΚΚΚ}

Γ2.

Α = {ΚΑΑ , ΚΑΚ , ΚΚΑ , ΚΚΚ}

Β = {ΑΚΚ , ΚΑΚ , ΚΚΑ , ΚΚΚ}

Γ = {ΑΑΑ , ΑΑΚ , ΚΚΑ , ΚΚΚ}

Γ3.

(α) Δ = Α∩Β = { ΚΑΚ , ΚΚΑ , ΚΚΚ}

$P(\Delta) = \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)} = \frac{3}{8}$

Ε = Α∪Β = {ΚΑΑ , ΚΑΚ , ΚΚΑ , ΚΚΚ , ΑΚΚ}

$P(E) = \frac{N(E)}{N(\Omega)} = \frac{5}{8}$

Ζ = Γ – Ε = {ΑΑΑ , ΑΑΚ}

$P(Z) = \frac{N(\Gamma - E)}{N(\Omega)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

ΒΑΚΑΛΗΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

(β)

P(H) = P((A∪B)') = P(E') = 1 – P(E) = $\frac{3}{8}$

P(Θ) = P((A-B)∪(B-A)) = P(A-B) + P(B-A) = $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$, σύμφωνα με τον απλό προσθετικό νόμο αφού (A-B)∩(B-A)=∅, αφού

A-B = {ΚΑΑ} με P(A-B) = $\frac{N(A-B)}{N(\Omega)}=\frac{1}{8}$

B-A = {ΑΚΚ} με P(B-A) = $\frac{N(B-A)}{N(\Omega)}=\frac{1}{8}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Χρόνος (σε λεπτά)	Κεντρική τιμή x_i	Συχνότητα v_i
[8, 8+c)		20
[8+c, 8+2c)	14	15
[8+2c, 8+3c)		10
[8+3c, 8+4c)		v_4
Σύνολο		v =

$$\frac{8+c+8+2c}{2}=14 \quad \Leftrightarrow \quad 16+3c=28 \quad \Leftrightarrow \quad 3c=12 \quad \Leftrightarrow \quad c=4$$

ΒΑΚΑΛΗΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

Δ2.

Χρόνος (σε λεπτά)	Κεντρική τιμή x_i	Συχνότητα v_i
[8, 12)	10	20
[12, 16)	14	15
[16, 20)	18	10
[20, 24)	22	v_4

$$\bar{x} = \frac{1}{v}\sum_{i=1}^{4} x_i v_i \quad \Leftrightarrow \quad 14 = \frac{x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 + x_4 v_4}{v}$$

$$\Leftrightarrow \quad 14 = \frac{200 + 210 + 180 + 22v_4}{v} \quad \Leftrightarrow \quad 14v = 590 + 22v_4$$

$$\Leftrightarrow \quad 7v = 295 + 11v_4 \quad \Leftrightarrow \quad 7v - 11v_4 = 295 \quad (1)$$

$$Επιπλέον \quad v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = v \quad \Leftrightarrow \quad 45 + v_4 = v \quad (2)$$

$$(1)και\ (2): \quad 7(45 + v_4) - 11v_4 = 295 \quad \Leftrightarrow \quad 315 + 7v_4 - 11v_4 = 295$$

$$\Leftrightarrow \quad -4v_4 = -20 \quad \Leftrightarrow \quad v_4 = 5$$

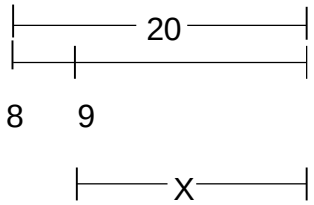
Δ3.

Χρόνος (σε λεπτά)	Κεντρική τιμή x_i	Συχνότητα v_i
[8, 12)	10	20
[12, 16)	14	15
[16, 20)	18	10
[20, 24)	22	5
Σύνολο		50

ΒΑΚΑΛΗΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

Α' τρόπος:

Η κατανομή των παρατηρήσεων στην κλάση [8,12] θεωρείται ομοιόμορφη.

Άρα 

$\frac{12-8}{12-9} = \frac{20}{x} \Leftrightarrow \frac{4}{3} = \frac{20}{x} \Leftrightarrow x = 15$

Τουλάχιστον 9 και κάτω από 12 λεπτά χρειάστηκαν 15 υπολογιστές.

Τουλάχιστον 12 και κάτω από 24 λεπτά χρειάστηκαν 15 + 10 + 5 = 30 υπολογιστές.

Άρα τουλάχιστον 9 λεπτά χρειάστηκαν 15 + 30 = 45 υπολογιστές.

Β' τρόπος:

Η κατανομή των παρατηρήσεων στην κλάση [8,12) θεωρείται ομοιόμορφη.

Κάτω από 9 λεπτά χρειάστηκαν $\frac{1}{4} \cdot 20 = 5$ υπολογιστές.

Άρα οι ζητούμενοι υπολογιστές είναι 50 – 5 = 45 υπολογιστές.

Δ4.

$$s^2 = \frac{1}{50} \cdot \sum_{i=1}^{4} (x_i - \bar{x})^2 \cdot \nu_i =$$

$$= \frac{(10-14)^2 \cdot 20 + (14-14)^2 \cdot 15 + (18-14)^2 \cdot 10 + (22-14)^2 \cdot 5}{50} =$$

$$= \frac{320 + 0 + 160 + 320}{50} = \frac{800}{50} = 16.$$

Άρα $s = \sqrt{s^2} = 4$

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{4}{14} > \frac{1,4}{14} = 0,1$$

Άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

ΒΑΚΑΛΗΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

Δ5.

$y_i = 0{,}8x_i$

Άρα $\bar{y} = 0{,}8 \cdot \bar{x} = 0{,}8 \cdot 14 = 11.2$

$s_y = |0{,}8| \cdot s_x = 0{,}8 \cdot s_x = 0{,}8 \cdot 4 = 3{,}2$

$\mathrm{CV_y} = \frac{\mathrm{s_y}}{\bar{\mathrm{y}}} = \frac{3{,}2}{11{,}2} > \frac{1{,}12}{11{,}2} = 0{,}1$ άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Επιμέλεια Καθηγητών Φροντιστηρίων Βακάλη

ΒΑΚΑΛΗΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ