ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ (ΟΜΑΔΑ Α΄)
ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΩΝ ΕΙΔΙΚΟΤΗΤΑΣ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΠΕΜΠΤΗ 23 ΜΑΪΟΥ 2013
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

ΗΜΕΡΗΣΙΑ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω συνεχής συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ με παράγουσα συνάρτηση F. Τι ονομάζεται ορισμένο ολοκλήρωμα της συνάρτησης f από το α έως το β;

Μονάδες 6

Α2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη **Λάθος,** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Εάν η τιμή του συντελεστή μεταβλητότητας είναι κάτω του 10%, ο πληθυσμός του δείγματος θεωρείται ομοιογενής.

(Μον. 2)

β) Εάν οι συναρτήσεις $f, g:A\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμες στο πεδίο ορισμού τους, με $g(x)\neq 0$, τότε ισχύει: $\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

(Μον. 2)

γ) Εάν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

(Μον. 2)

δ) Ισχύει ότι: $\int_{\alpha}^{\beta} e^x\,dx = \frac{e^{\beta+1}}{\beta+1} - \frac{e^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ με $\alpha \neq -1$ και $\beta \neq -1$.

(Μον. 2)

ε) Δίνονται οι συναρτήσεις f,g συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$. Αν $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \geq \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx$.

(Μον. 2)

Μονάδες 10

Α3. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ισότητες και να τις συμπληρώσετε:

α) $\int_{\alpha}^{\beta} \eta\mu x\,dx =$ **...**

(Μον. 3)

β) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και c μία σταθερά, τότε:

$(c \cdot f)'(x) =$ **...**

(Μον. 3)

γ) Αν $\alpha \in \mathbb{R}^*$ και $x > 0$, τότε:

$(x^{\alpha})' =$ **...**

(Μον. 3)

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha^2 x + \ln x\ , & \text{αν } 0 < x \leq 1 \text{ και } \alpha \in \mathbb{R} \\ \dfrac{x^2 - x}{\sqrt{x+3} - 2}\ , & \text{αν } x > 1 \end{cases}$$

Β1. Να βρείτε το $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$.

Μονάδες 7

Β2. Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)=4$.

Μονάδες 10

Β3. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0=1$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται οι μισθοί των υπαλλήλων μίας εταιρείας (σε εκατοντάδες €):

Μισθός (εκατοντάδες €) x_i	Συχνότητα (αριθμός υπαλλήλων) ν_i	Σχετική συχνότητα $f_i\%$	$x_i\nu_i$
6	25		
10	17		
15	6		
20	2		
Σύνολα	ν=...	100	

Γ1. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα και να τον συμπληρώσετε.

Μονάδες 5

Γ2. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$ των μισθών των υπαλλήλων.

Μονάδες 5

Γ3. Τι ποσοστό υπαλλήλων έχουν μισθό το πολύ 1000 €;

Μονάδες 7

Γ4. Να υπολογίσετε τη διακύμανση s^2 των μισθών των υπαλλήλων της εταιρείας.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x-2)^2(x+\alpha),\ x\in\mathbb{R},\ \alpha\in\mathbb{R}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης f είναι $f'(x)=(x-2)(3x+2\alpha-2),\ x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 5

Δ2. Να βρείτε τον αριθμό α, αν η συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0=4$.

Μονάδες 5

Δ3. Για α=-5, να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το είδος και τις τιμές των ακροτάτων.

Μονάδες 8

Δ4. Δίνονται οι συναρτήσεις $g(x)=3x^2-12x,\ x\in\mathbb{R}$ και $h(x)=6x-24,\ x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω, που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων g(x) και h(x).

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνον τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμιά άλλη σημείωση. Κατά την

αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.

3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνον με μπλε ή μόνον με μαύρο στυλό ανεξίτηλης μελάνης.
5. Κάθε απάντηση τεκμηριωμένη επιστημονικά είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: **10.00 π.μ.**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΒΑΚΑΛΗΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ
ΑΠΟ ΤΟ 1967

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ (ΟΜΑΔΑ Α΄)
ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΩΝ ΕΙΔΙΚΟΤΗΤΑΣ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
(ΟΜΑΔΑ Β΄)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2013

ΘΕΜΑ Α

Α1. Ονομάζω τη σταθερή διαφορά $F(\beta)-F(\alpha)$ και το συμβολίζω με $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$

Α2. α) Σ, **β)** Σ, **γ)** Λ, **δ)** Λ, **ε)** Σ

Α3.

α) $\int_{\alpha}^{\beta} \eta\mu x dx = [-\sigma\upsilon\nu x]_{\alpha}^{\beta} = -\sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\alpha$

β) $(cf)'(x) = c \cdot f'(x)$

γ) $(x^{\alpha})' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$

ΘΕΜΑ Β

Β1. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}\left(\alpha^2 x + \ln x\right) = \alpha^2 + l\text{n}1 = \alpha^2$

Β2.

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-x}{\sqrt{x+3}-2} = \lim_{x\to 1^+}\frac{x(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{\left(\sqrt{x+3}-2\right)\left(\sqrt{x+3}-2\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 1^+}\frac{x(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{\left(\sqrt{x+3}\right)^2-2^2} = \lim_{x\to 1^+}\frac{x(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{x+3-4} = 1\cdot 4 = 4$$

Β3. Πρέπει $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$ $\qquad f(1) = \alpha^2 \cdot 1 + l\,n1 = \alpha^2$

Άρα πρέπει $\alpha^2 = 4$ δηλ. $\alpha = \pm 2$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

Μισθός (εκατοντάδεςευρώ) x_i	ν_i	Σχετική συχνότητα $f_i\%$	$x_i\nu_i$
6	25	50	150
10	17	34	170
15	6	12	90
20	2	4	40
Σύνολα	$\nu = 50$	100	450

$f_i = \frac{\nu_i}{\nu}$ άρα $f_1 = \frac{25}{50} = 0,5...$

Γ2. $\overline{x} = \frac{\Sigma x_i \nu_i}{\nu} = \frac{450}{50} = 9$ εκατοντάδες ευρώ ή 900 ευρώ

Γ3. το πολύ 1000 ευρώ (δηλ. 10 εκατοντάδες ευρώ στον πίνακα) έχει το $50\% + 34\% = 84\%$ των υπαλλήλων.

Γ4. Συμπληρώνω τον πίνακα με τις στήλες:

$x_i - \overline{x}$	$(x_i - \overline{x})^2$	$(x_i - \overline{x})^2 \nu_i$
-3	9	225
1	1	17
6	36	216
11	121	242
		700

άρα $S^2 = \frac{700}{50} = 14$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$$f'(x) = \left[(x-2)^2\right]'(x+\alpha) + (x-2)^2(x+\alpha)' = 2(x-2)(x-2)'(x+\alpha) + (x-2)^2 =$$

$$= 2(x-2)(x+\alpha) + (x-2)^2 = (x-2)\left[2(x+a) + x - 2\right] = (x-2)(2x + 2\alpha + x - 2) =$$

$$= (x-2)(3x + 2\alpha - 2)$$

Δ2.

Λύνω $f'(x)=0$

$(x-2)(3x+2\alpha-2)$ $\begin{array}{l} x=2 \\ 3x+2\alpha-2=0 \text{ άρα x=}\dfrac{2-2\alpha}{3} \end{array}$

πρέπει $f'(4)=0$ άρα $\dfrac{2-2\alpha}{3}=4$ όποτε $2-2\alpha=12$ άρα $\alpha=-5$

Δ3. για $\alpha=-5$ $f'(x)=(x-2)(3x-12)$ και μηδενίζεται στα $\begin{array}{l} x_1=2 \\ x_2=4 \end{array}$

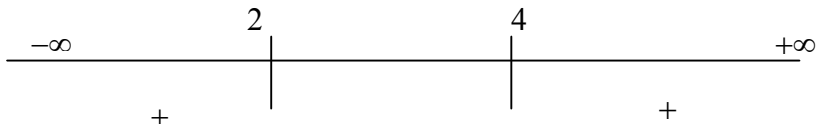
x	$-\infty$ 2	4 $+\infty$	
$f'(x)$	+	−	+
$f(x)$	γνησίως αύξουσα	γνησίως φθίνουσα	γνησίως αύξουσα

Για κάθε $x\in(-\infty,2]$ η f είναι γνησίως αύξουσα
Για κάθε $x\in[2,4]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα
Για κάθε $x\in[4,+\infty)$ η f είναι γνησίως αύξουσα

για $x=2$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f(2)=0$
για $x=4$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $f(4)=-4$

Δ4. Έστω $f(x)=g(x)-h(x)=3x^2-12x-6x+24=3x^2-18x+24$

Λύνω $f(x)=0$ δηλαδή $x^2+6x+8=0$ και βρίσκω λύσεις $\begin{array}{l} x_1=4 \\ x_2=2 \end{array}$



Άρα

$$\mathrm{E}(\Omega)=\int_2^4 \left| f(x) \right| dx=\int_2^4 \left| 3x^2-18x+24 \right| dx=\int_2^4 \left(-3x^2+18x-24\right) dx=$$

$$\left[-\cancel{3}\frac{x^3}{\cancel{3}}\right]_2^4+\left[18\frac{x^2}{2}\right]_2^4-\left[24x\right]_2^4=-4^3+2^3+9\cdot 4^2-9\cdot 2^2-24\cdot 4+24\cdot 2=$$

$$=-64+8+144-36-96+48=4\tau.\mu.$$

Επιμέλεια Καθηγητών Φροντιστηρίων Βακάλη