



Θέμα Δ

Έστω η γνησίως μονότονη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα

$$f(f(x)) = f(x)e^{xe^{x^2}f(x)}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

η οποία είναι συνεχής στο $x = 0$.

Δ1. Βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Δ2. Να βρείτε το είδος μονοτονίας της f .

Δ3. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$.

Δ4. Να υπολογίσετε, αν υπάρχει, το

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2020}{f(x) - x}$$

Δ5. Να βρεθούν όλες οι συνεχείς συναρτήσεις $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει: $|g(x)| = |f(x) - x|$, $x \in \mathbb{R}$.

Δ6. Αν η f' είναι συνεχής στο $[0,1]$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$f'(x)e^x = \frac{f^2(x)}{1-x}$$

έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.