Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ' Λυκείου

Θέμα 1

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\frac{1}{x}+\ln x$ και $g(x)=(x+\ln x-2)(x+1)$, $x\in(0,+\infty)$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)\geq 1$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0)=0$

(Μονάδες 6)

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της C_g

(Μονάδες 7)

δ) Να αποδείξετε ότι $\int_1^2 \frac{g(x)}{x}dx=\frac{(\ln 2)^2-1}{2}$

(Μονάδες 7)

Θέμα 2

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x\in(0,+\infty)$ ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $2(f(x))^3+f(x)\cdot f'(x)=0$
- $f(x)\neq 0$
- $f(1)+2f(2)=1$

Θεωρούμε επίσης και τη συνάρτηση $g(x)=2x-\frac{1}{x}$, $x\in(0,+\infty)$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\frac{1}{2x}$, $x\in(0,+\infty)$

(Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει σημείο της γραφικής παράστασης της f στο οποίο να ορίζεται εφαπτομένη που να είναι παράλληλη προς οποιαδήποτε εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g

(Μονάδες 7)

γ) Αν για τους θετικούς αριθμούς α, β, γ ισχύουν $\left\{\begin{array}{l} 2\alpha-\frac{1}{\alpha}=\beta \\ 2\beta-\frac{1}{\beta}=\gamma \\ 2\gamma-\frac{1}{\gamma}=\alpha \end{array}\right\}$

να αποδείξετε ότι $\alpha=\beta=\gamma=1$

(Μονάδες 9)

ΧΑΤΖΗΝΙΚΟΛΑΟΥ ΙΟΡΔΑΝΗΣ

Θέμα 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+1$, $x\in\mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι το σημείο της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f που απέχει από το σημείο $A(5,0)$ τη μικρότερη απόσταση είναι το $M(1,2)$.

(Μονάδες 7)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την C_f, τον άξονα $x'x$, τον άξονα $y'y$ και το ευθύγραμμο τμήμα AM.

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από το σημείο M και χωρίζει το χωρίο Ω σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

(Μονάδες 7)

δ) Να αποδείξετε ότι $\int_{\alpha}^{\beta}\frac{x^2-\ln f(x)}{x^2\cdot\ln f(x)}dx>0$, όπου $0<\alpha<\beta$

(Μονάδες 5)