ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Γ ΄ΛΥΚΕΙΟΥ (ΜΕΡΟΣ Β)

● ΘΕΩΡΗΜΑ ROLLE

● ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

● ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

ΜΟΡΦΗ 6η: ΥΠΑΡΞΗ ΜΟΝΑΔΙΚΟΤΗΤΑΣ ΡΙΖΑΣ

- δείχνουμε ταυτόχρονα ότι έχει:

i. τουλάχιστον μία ρίζα
ii. το πολύ μία ρίζα

Άρα ακριβώς μία ρίζα

➢ Για να δείξουμε το (i) χρησιμοποιούμε:

- Το θεώρημα BOLZANO ή ενδιάμεσων τιμών
- Σύνολο τιμών
- Προφανής ρίζα (με δοκιμή)

  Συνήθεις ρίζες είναι το 0,1, e, π
- Το θεώρημα Rolle στην αρχική
- Πολυωνυμική συνάρτηση περιττού βαθμού

➢ Για να δείξουμε το (ii) χρησιμοποιούμε:

- Το θεώρημα Rolle και καταλήγουμε σε άτοπο
- Γνησίως μονότονη
- Από κάποιο δεδομένο της υπόθεσης

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.301

Έστω $f:[\alpha,\beta]\to R$ με α, β>0 και $\frac{1}{\beta}<f(x)<\frac{1}{\alpha}$ και $f'(x)\neq\frac{1}{\alpha\beta}$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

Να δείξετε ότι υπάρχει μόνο ένας αριθμός $x_o\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f(x_o)=\frac{1}{\alpha\beta}x_o$.

<u>ΛΥΣΗ</u>

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-\frac{1}{\alpha\beta}x$

- Ένα τουλάχιστον $x_o\in(\alpha,\beta)$

Η g είναι συνεχής στο [α, β] ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων

$$g(\alpha)=f(\alpha)-\frac{1}{\alpha\beta}\alpha=f(\alpha)-\frac{1}{\beta}$$

$$g(\beta)=f(\beta)-\frac{1}{\alpha\beta}\beta=f(\beta)-\frac{1}{\alpha}$$

Όμως : $\frac{1}{\beta}<f(x)<\frac{1}{\alpha}$

Για x = α $\quad \frac{1}{\beta}<f(\alpha)<\frac{1}{\alpha} \Rightarrow \frac{1}{\beta}<f(\alpha) \Rightarrow f(\alpha)-\frac{1}{\beta}>0$

Για x = β $\quad \frac{1}{\beta}<f(\beta)<\frac{1}{\alpha} \Rightarrow f(\beta)<\frac{1}{\alpha} \Rightarrow f(\beta)-\frac{1}{\alpha}<0$

Άρα $\left.\begin{matrix} g(\alpha)>0 \\ g(\beta)<0 \end{matrix}\right\}\Rightarrow$ $g(\alpha)\cdot g(\beta)<0$ άρα από **Θ.BOLZANO** υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o\in(\alpha,\beta)$ ώστε

$$g(x_o)=0 \Leftrightarrow f(x_o)-\frac{1}{\alpha}=0 \Leftrightarrow$$

- Ένα το πολύ x_o

Έστω ότι η g έχει δύο ρίζες στο (α, β) τις x_1, x_2 δηλαδή $g(x_1)=g(x_2)=0$

Στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με $g'(x)=f'(x)-\frac{1}{\alpha\beta}$

Άρα από θ. Rolle υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)$ τέτοιο ώστε

$g'(\xi)=0 \quad\Leftrightarrow\quad f'(\xi)-\frac{1}{\alpha\beta}=0 \quad\Leftrightarrow\quad f'(\xi)=\frac{1}{\alpha\beta}$ άτοπο από υπόθεση

Άρα η g έχει ακριβώς μία ρίζα στο (α, β)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.302

Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύουν $x^2f''(x)\neq-1$ για κάθε $x\in R$ και $f(2)-f(1)=\ln2-1$. Να δείξετε ότι οι $C_{f'}$ και $C_{g'}$ όπου $g(x)=\ln x-x$ έχουν ένα κοινό σημείο.

<u>ΛΥΣΗ</u>

Έστω η συνάρτηση $h(x)=f(x)-g(x) \quad\Leftrightarrow\quad h(x)=f(x)-\ln x+x,\quad x>0$

Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f'(x)=g'(x) \quad\Leftrightarrow\quad f'(x)-g'(x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad h'(x)=0$ έχει μία μόνο λύση στο $(0,+\infty)$.

- Για την h ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο [1,2] αφού:
  - Είναι συνεχής στο [1,2] ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων (f συνεχής ως παραγωγίσιμη)
  - Είναι παραγωγίσιμη στο (1,2) με $h'(x)=f'(x)-\frac{1}{x}+1$
  - $h(1)=f(1)-\ln1+1=f(1)+1$

    $h(2)=f(2)-\ln2+2$

Όμως $f(2)-f(1)=\ln2-1 \overset{+(-1)}{\Rightarrow} f(2)-f(1)-1=\ln2-1-1 \quad\Leftrightarrow$

$f(2)-f(1)-1=\ln2-2 \quad\Leftrightarrow\quad f(2)-\ln2+2=f(1)+1 \quad\Leftrightarrow\quad h(1)=h(2)$

Άρα από θ. Rolle υπάρχει $x_o\in(1,2)$ ώστε $h'(x_o)=0$

- Έστω ότι η $h'(x)=0$ έχει δύο λύσεις στο (1,2) τις x_1, x_2 με $x_1<x_2$ και $h'(x_1)=h'(x_2)=0$

  Η h είναι παραγωγίσιμη στο $[x_1, x_2]$ με $h''(x)=f''(x)+\frac{1}{x^2}$

Άρα από θ.Rolle υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)$ ώστε

$$h''(\xi)=0 \Leftrightarrow f''(\xi)+\frac{1}{\xi^2}=0 \Leftrightarrow f''(\xi)=-\frac{1}{\xi^2} \Leftrightarrow \xi^2 f''(\xi)=-1$$ Άτοπο από την υπόθεση

Άρα η εξίσωση $h'(x)=0$ έχει μια μόνο λύση στο $(0,+\infty)$.

ΜΟΡΦΗ 7η: ΥΠΑΡΞΗ ΡΙΖΑΣ ΤΗΣ $f''(x)$ ή $f^{(3)}(x)$ ....

- Εφαρμόζουμε το θεώρημα Rolle για την παράγωγο της αμέσως προηγούμενης τάξης.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.303

Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο [α, β] με α>0 και $f(\alpha)=\frac{1}{\beta\gamma}$, $f(\beta)=\frac{1}{\alpha\gamma}$, $f(\gamma)=\frac{1}{\alpha\beta}$, $\gamma\in(\alpha,\beta)$.

Να δείξετε ότι:

i. Υπάρχουν $\kappa\in(\alpha,\gamma)$ και $\lambda\in(\gamma,\beta)$ ώστε

$$f'(\kappa)=\frac{f(\kappa)}{\kappa} \quad , \quad f'(\lambda)=\frac{f(\lambda)}{\lambda}$$

ii. Αν η ευθεία που ορίζεται από τα σημεία Α(κ, f(κ)) Β(λ, f(λ)) διέρχεται από το σημείο Ο(0,0) τότε υπάρχει $\xi\in(\kappa,\lambda)$ ώστε $f''(\xi)=0$

ΛΥΣΗ

Έχουμε :

$$\left.\begin{array}{l} f(\alpha)=\frac{1}{\beta\gamma} \Leftrightarrow \frac{f(\alpha)}{\alpha}=\frac{1}{\alpha\beta\gamma} \\ f(\beta)=\frac{1}{\alpha\gamma} \Leftrightarrow \frac{f(\beta)}{\beta}=\frac{1}{\alpha\beta\gamma} \\ f(\gamma)=\frac{1}{\alpha\beta} \Leftrightarrow \frac{f(\gamma)}{\gamma}=\frac{1}{\alpha\beta\gamma} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{f(\alpha)}{\alpha}=\frac{f(\beta)}{\beta}=\frac{f(\gamma)}{\gamma}$$

θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{x},\quad x\in[\alpha,\beta]$

Για τη συνάρτηση εφαρμόζουμε το θ.Rolle στα διαστήματα [α, γ] και [γ, β] στα οποία η g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με:

$$g'(x)=\frac{f'(x)\cdot x-f(x)}{x^2}\ h(\beta)=e^{\beta}f'(\beta)$$

Οπότε υπάρχουν κ∈ (α, γ) και λ∈ (γ, β) ώστε:

$$g'(\kappa)=0 \qquad \text{και} \qquad g'(\lambda)=0$$

$$g'(\kappa)=0 \Leftrightarrow \frac{\kappa f'(\kappa)-f(\kappa)}{\kappa^2}=0 \Leftrightarrow \kappa f'(\kappa)-f(\kappa)=0 \Leftrightarrow \kappa f'(\kappa)=f(\kappa) \Leftrightarrow f'(\kappa)=\frac{f(\kappa)}{\kappa}$$

και

$$g'(\lambda)=0 \Leftrightarrow \frac{\lambda f'(\lambda)-f(\lambda)}{\lambda^2}=0 \Leftrightarrow \lambda f'(\lambda)-f(\lambda)=0 \Leftrightarrow \lambda f'(\lambda)=f(\lambda) \Leftrightarrow f'(\lambda)=\frac{f(\lambda)}{\lambda}$$

ii. Η ευθεία που ορίζουν τα σημεία Α και Β έχει εξίσωση:

$$y-f(\kappa)=\lambda_{AB}(x-\kappa)$$

$$\lambda_{AB}=\frac{f(\lambda)-f(\kappa)}{\lambda-\kappa} \quad \text{και} \quad O(0,0) \ \text{σημείο της ευθείας άρα}$$

$$0-f(\kappa)=\frac{f(\lambda)-f(\kappa)}{\lambda-\kappa}(0-\kappa) \Leftrightarrow -(\lambda-\kappa)f(\kappa)=(f(\lambda)-f(\kappa))\cdot(-\kappa) \Leftrightarrow$$

$$-\lambda f(\kappa)+\cancel{\kappa f(\kappa)}=-\kappa f(\lambda)+\cancel{\kappa f(\kappa)} \Leftrightarrow \lambda f(\kappa)=\kappa f(\lambda) \Leftrightarrow \frac{f(\kappa)}{\kappa}=\frac{f(\lambda)}{\lambda} \Leftrightarrow$$

$$f'(\kappa)=f'(\lambda)$$

Η f' είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο [κ, λ] και $f'(\kappa)=f'(\lambda)$

Άρα από θ.Rolle υπάρχει $\xi\in(\kappa,\lambda)$ ώστε $f''(\xi)=0$.

Β΄ τρόπος:

$$\left.\begin{aligned}\lambda_{OA}&=\frac{f(\kappa)-0}{\kappa-0}=\frac{f(\kappa)}{\kappa}\\ \lambda_{OB}&=\frac{f(\lambda)-0}{\lambda-0}=\frac{f(\lambda)}{\lambda}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \qquad \lambda_{OA}=\lambda_{OB} \Leftrightarrow \frac{f(\kappa)}{\kappa}=\frac{f(\lambda)}{\lambda} \Leftrightarrow$$

$$f'(\kappa)=f'(\lambda)$$

και συνεχίζουμε όπως παραπάνω.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.304

Έστω μία συνάρτηση f η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f(1)=1$, $f(2)=4-\ln 2$, $f(e)=e^2-1$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,e)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi)=\frac{1}{\xi^2}+2$.

<u>ΛΥΣΗ</u>

Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f''(x)=\frac{1}{x^2}+2$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (1,e). Για κάθε $x\in(1,e)$ έχουμε:

$$f''(x)=\frac{1}{x^2}+2 \Leftrightarrow f''(x)-\frac{1}{x^2}-2=0 \Rightarrow \left(f'(x)+\frac{1}{x}-2x\right)=0 \Leftrightarrow \left(f(x)+\ln x-x^2\right)''=0$$

Έστω λοιπόν η συνάρτηση $g(x)=f(x)+\ln x-x^2$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,e)$ ώστε $g''(\xi)=0$

Για τη συνάρτηση g ισχύουν οι προϋποθέσεις του θ.Rolle σε καθένα από τα διαστήματα [1,2] και [2,e] δηλαδή:

Η g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στα διαστήματα [1,2] και [2,e] (συνεχής είναι αφού είναι παραγωγίσιμη) και

$$\left.\begin{aligned} g(1)=f(1)+\ln 1-1=f(1)-1=1-1=0 \\ g(2)=f(2)+\ln 2-2^2=4-\ln 2+\ln 2-4=0 \\ g(e)=f(e)+\ln e-e^2=e^2-1+1-e^2=0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \quad g(1)=g(2)=g(e)=0$$

Άρα από θ.Rolle υπάρχουν $\xi_1\in(1,2)$ και τέτοια ώστε $g'(\xi_1)=0$ και $g'(\xi_2)=0$

Ακόμη η g' είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο [ξ_1,ξ_2] και $g'(\xi_1)=g'(\xi_2)=0$ οπότε πάλι από θ.Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subseteq(1,e)$ τέτοιο ώστε: $g''(\xi)=0$.

ΜΟΡΦΗ 8η: ΥΠΑΡΞΗ ΡΙΖΑΣ ΤΗΣ f Ή ΤΗΣ $f(x)=0$

- Εφαρμόζω το θ.Rolle σε μία αρχική συνάρτηση F της f $\left(F'(x)=f(x)\right)$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.305

Έστω $f:[\alpha,\beta]\to R$ ισχύουν:

i. Η f είναι συνεχής στο [α, β]

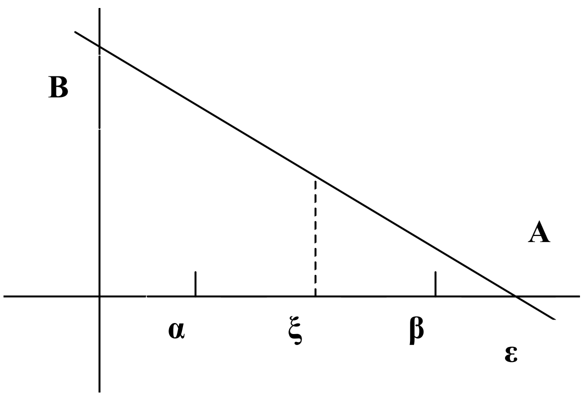
ii. Η f είναι παραγωγίσιμη στο (α, β)

iii. 0 < α < β και $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$

iv. $\frac{f(\alpha)}{\beta}=\frac{f(\beta)}{\alpha}$

Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε το $M(\xi, f(\xi))$ να είναι το μέσο του τμήματος που ορίζει η εφαπτομένη της C_f στο Μ με τους άξονες.

<u>ΛΥΣΗ</u>



<u>1ος τρόπος</u>

Η εξίσωση εφαπτομένης (ε) της C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ ισούται:

$$y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi) \qquad (1)$$

Έχουμε $\dfrac{f(\alpha)}{\beta} = \dfrac{f(\beta)}{\alpha} \iff \alpha f(\alpha) = \beta f(\beta)$

Θεωρώ συνάρτηση $g(x) = xf(x)$ η οποία ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θ.Rolle στο [α, β] αφού είναι συνεχής στο [α, β], παραγωγίσιμη στο (α, β) με $g'(x) = f(x) + xf'(x)$ και $g(\alpha) = g(\beta)$ οπότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $g'(\xi) = 0 \iff f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0 \quad (2)$

Η εξίσωση εφαπτομένης της (1) με βάση τη (2) γράφεται:

$$y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi) \iff y - f(\xi) = xf'(\xi) - \xi f'(\xi) \overset{(2)}{\iff}$$

$$y = xf'(\xi) + 2f(\xi) \overset{(2)}{\iff} y = -\frac{xf(\xi)}{\xi} + 2f(\xi)$$

και τους τέμνει τους άξονες x'x και y'y στα σημεία:

$$\begin{aligned} &x'x \\ &y = 0 \\ &0 = -\frac{xf(\xi)}{\xi} + 2f(\xi) \\ &xf(\xi) = 2\xi f(\xi) \\ &x = 2\xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &y'y \\ &x = 0 \\ &y = 0 + 2f(\xi) \\ &y = 2f(\xi) \end{aligned}$$

B(0,f(ξ))

A(2ξ,0)

Επειδή όμως $\frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2\xi}{2} = \xi$ και $\frac{y_A + y_B}{2} = \frac{2f(\xi)}{2} = f(\xi)$

Άρα το $M(\xi, f(\xi))$ είναι το μέσο του ΑΒ.

2ος τρόπος

Έχουμε την εφαπτομένη: $y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi)$

Θα βρούμε τα σημεία στα οποία η ευθεία τέμνει τους δύο άξονες $x'x$ και $y'y$.

Έστω Α(x, 0) και Β(0, y) τα σημεία αυτά τα οποία επαληθεύουν την εξίσωση της εφαπτομένης οπότε:

$$A \in \text{εφαπτομένη} \Leftrightarrow 0 - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -f(\xi) = xf'(\xi) - \xi f'(\xi) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \xi f'(\xi) - f(\xi) = xf'(\xi)$$

- Αν $f'(\xi) = 0$ τότε:

  $-f(\xi) = 0$ άτοπο από υπόθεση

- Αν $f'(\xi) \neq 0$ τότε

  $$x = \frac{\xi f'(\xi) - f(\xi)}{f'(\xi)}$$

Άρα $A\left(\frac{\xi f'(\xi) - f(\xi)}{f'(\xi)}, 0\right)$

Όμοια για το Β έχουμε:

$$y - f(\xi) = f'(\xi)(0 - \xi) \Leftrightarrow y - f(\xi) = -\xi f'(\xi)$$
$$y = f(\xi) - \xi f'(\xi)$$

Άρα το $B(0, f(\xi) - \xi f'(\xi))$

Για να είναι το Μ μέσο του ΑΒ πρέπει να ισχύει:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$

$$\xi = \frac{\dfrac{\xi f'(\xi) - f(\xi)}{f'(\xi)}}{2} \quad \Leftrightarrow$$

$$2\xi = \frac{\xi f'(\xi) - f(\xi)}{f'(\xi)} \quad \Leftrightarrow$$

$$2\xi f'(\xi) = \xi f'(\xi) - f(\xi) \quad \Leftrightarrow$$

$$f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

$$f(\xi) = \frac{0 + f(\xi) - \xi f'(\xi)}{2}$$

$$2f(\xi) = f(\xi) - \xi f'(\xi) \quad \Leftrightarrow$$

$$f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$$

Άρα πρέπει να δείξουμε ότι ισχύει $\xi f'(\xi) + f(\xi) = 0$

ΣΧΟΛΙΟ:

Έχουμε τη σχέση $xf'(x) + f(x) = 0$ και προσπαθούμε να βρούμε την αρχική της.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = xf(x), \quad x \in [\alpha, \beta]$

- Η g είναι συνεχής στο [α,β]
- Η g είναι παραγωγίσιμη στο (α, β)
- $\left.\begin{array}{l} g(\alpha) = \alpha f(\alpha) \\ g(\beta) = \beta f(\beta) \end{array}\right\} \Rightarrow$ $g(\alpha) = g(\beta)$ διότι έχουμε

$$\frac{f(\alpha)}{\beta} = \frac{f(\beta)}{\alpha} \quad \Leftrightarrow$$

$$\alpha f(\alpha) = \beta f(\beta)$$

Άρα από θ.Rolle υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $g'(\xi) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \xi f'(\xi) + f(\xi) = 0$.

Άρα υπάρχει σημείο $M(\xi, f(\xi))$ ώστε να είναι το μέσον του τμήματος ΑΒ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.306

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:[1,e] \to R$ η οποία είναι και παραγωγίσιμη στο $(1,e)$. Αν $f(e) = 0$ να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1,e)$ τέτοιο ώστε $\xi f'(\xi) \ln \xi = -f(\xi)$

ΛΥΣΗ

Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $xf'(x)\ln x = -f(x)$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο (1, e)

Για κάθε $x \in (1,e)$ έχουμε:

$$xf'(x)\ln x = -f(x) \Leftrightarrow xf'(x)\ln x + f(x) = 0 \overset{:x}{\Leftrightarrow}$$
$$f'(x)\ln x + f(x)\frac{1}{x} \Leftrightarrow (f(x)\ln x)' = 0$$

Έστω λοιπόν η συνάρτηση $g(x) = f(x)\ln x \quad x \in [1,e]$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι η εξίσωση $g'(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο (1,e). Για την g έχουμε:

- Είναι συνεχής στο [1,e] ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.
- Είναι παραγωγίσιμη στο (1,e)
- $\left.\begin{matrix} g(1) = f(1)\ln 1 = 0 \\ g(e) = f(e)\ln e = 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow g(1) = g(e)$

Άρα από θ.Rolle υπάρχει $\xi \in (1,e)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi) = 0$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.307

Αν η συνάρτηση $f:[0,\pi] \to R$ είναι συνεχής, παραγωγίσιμη στο (0, π) και η C_f δεν τέμνει τον άξονα $x'x$ να δείξετε ότι υπάρχει $\gamma \in (0,\pi)$ τέτοιο ώστε:

$$f(\gamma)\sigma\upsilon\nu\gamma = f'(\gamma)\eta\mu\gamma$$

ΛΥΣΗ

Επειδή η C_f δεν τέμνει τον άξονα $x'x$ είναι $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [0,\pi]$. Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x)\sigma\upsilon\nu x = f'(x)\eta\mu x$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο (0,π). Για κάθε $x \in (0,\pi)$ έχουμε:

$$f(x)\sigma\upsilon\nu x = f'(x)\eta\mu x \Leftrightarrow f(x)\sigma\upsilon\nu x - f'(x)\eta\mu x = 0 \Leftrightarrow$$

$$f(x)(\eta\mu x)' - f'(x)\eta\mu x = 0 \overset{:f^2(x)}{\Leftrightarrow} \frac{f(x)(\eta\mu x)' - f'(x)\eta\mu x}{f^2(x)} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\eta\mu x}{f(x)}\right)' = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \dfrac{\eta\mu x}{f(x)} \quad x \in [0,\pi]$

Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $g'(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (0,π).

Για την g έχουμε:

- είναι συνεχής στο [0,π] ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων
- είναι παραγωγίσιμη στο (0,π)
- $\left.\begin{matrix} g(0)=\dfrac{\eta\mu 0}{f(0)}=0 \\ g(\pi)=\dfrac{\eta\mu\pi}{f(\pi)}=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \quad g(0)=g(\pi)$

Άρα από θ.Rolle υπάρχει $\gamma\in(0,\pi)$ τέτοιο ώστε $g'(\gamma)=0$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.308

Έστω ότι η συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to R$ με 0 < α < β είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f(x)>0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$. Αν $(f(\alpha))^{\beta}=(f(\beta))^{\alpha}$ να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_o)\ln f(x_o)=x_o f'(x_o)$.

ΛΥΣΗ

Έχουμε την εξίσωση $f(x)\ln f(x)=xf'(x)$ και θα πρέπει να δείξουμε ότι έχει μία τουλάχιστον λύση στο (α, β). Αναζητούμε λοιπόν την αρχική αυτή ώστε να εφαρμόσουμε το θ.Rolle.

Σε αυτή την άσκηση θα μας βοηθήσει να βρούμε την αρχική ή τη δοθείσα σχέση. Έχουμε:

ΣΧΟΛΙΟ:

Θα βρούμε την αρχική F από την σχέση

$$(f(\alpha))^{\beta}=(f(\beta))^{\alpha} \Leftrightarrow \ln(f(\alpha))^{\beta}=\ln(f(\beta))^{\alpha} \Leftrightarrow$$

$$\alpha\ln f(\beta)=\beta\ln f(\alpha) \Leftrightarrow \frac{\ln f(\alpha)}{\alpha}=\frac{\ln f(\beta)}{\beta} \quad (1)$$

Θεωρούμε συνάρτηση $g(x)=\dfrac{\ln f(x)}{x}$, $x\in[\alpha,\beta]$

Για την g έχουμε:

- είναι συνεχής στο [α, β] ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων
- είναι παραγωγίσιμη στο (α,β) με

$$g'(x)=\frac{\frac{f'(x)}{f(x)}x-\ln f(x)}{x^2}=\frac{xf'(x)-f(x)\ln f(x)}{x^2 f(x)}$$

- $g(\alpha)=g(\beta)$ από την (1)

Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε:

$$g'(x_o)=0 \;\Leftrightarrow\; \frac{x_o f'(x_o)-f(x_o)\ln f(x_o)}{x_o^2 f(x_o)}=0 \;\Leftrightarrow f(x_o)\ln f(x_o)=x_o f'(x_o)$$

ΜΟΡΦΗ 9η : ΥΠΑΡΞΗ $\xi\in(\alpha,\beta)$ ΩΣΤΕ ΝΑ ΙΚΑΝΟΠΟΙΕΙΤΑΙ ΣΧΕΣΗ

ΤΕΧΝΑΣΜΑ ΜΕ $e^{g(x)}$

- Αν έχουμε τη μορφή $f'(x)+g(x)f(x)=h(x)$ ή $f''(x)+g(x)f'(x)h(x)$

Δηλαδή:

$$f'(x)=xf(x) \;\Leftrightarrow\; f'(x)-xf(x)=0 \;\overset{\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}}{\Leftrightarrow} e^{-\frac{x^2}{2}}f'(x)-e^{-\frac{x^2}{2}}xf(x)=0 \;\Leftrightarrow\; \left(e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot f(x)\right)'=0$$

όπου $\left(-\frac{x^2}{2}\right)'=-x$ οπότε θεωρούμε ως $g(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot f(x)$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.309

Δίνεται $f:[\alpha,\beta]\to R$ συνεχής στο [α, β] , παραγωγίσιμη στο (α, β) με $f(\alpha)=f(\beta)=0$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε:

$$f'(\xi)+(1+\sigma\upsilon\nu\xi)f(\xi)=0$$

<u>ΛΥΣΗ</u>

<u>ΣΧΟΛΙΟ:</u> Στο πρόχειρο δουλεύουμε:

$f'(\xi)+(1+\sigma\upsilon\nu\xi)f(\xi)=0 \;\Leftrightarrow$
$f'(x)+(1+\sigma\upsilon\nu x)f(x)=0$ με

$g(x)=1+\sigma\upsilon\nu x$ και αρχική της
$G(x)=x+\eta\mu x$ άρα $e^{G(x)}=e^{x+\eta\mu x}$

Οπότε $h(x)=e^{x+\eta\mu x}\cdot f(x)$

ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΕΥΡΕΣΗΣ ΑΡΧΙΚΗΣ

Θεωρούμε $h(x)=e^{x+\eta\mu x}\cdot f(x),\quad x\in[\alpha,\beta]$

- Η h είναι συνεχής στο [α, β] ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων
- Η h είναι παραγωγίσιμη στο (α, β)
- $\left.\begin{array}{l} h(\alpha)=e^{\alpha+\eta\mu\alpha}f(\alpha)=0 \\ h(\beta)=e^{\beta+\eta\mu\beta}f(\beta)=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \; h(\alpha)=h(\beta)$

Άρα από θ.Rolle υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε

$h'(\xi)=0 \;\Leftrightarrow$

$$\left.\begin{array}{r} e^{\xi+\eta\mu\xi}\left((1+\sigma\upsilon\nu\xi)f(\xi)+f'(\xi)\right) \\ e^{\xi+\eta\mu\xi}>0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad (1+\sigma\upsilon\nu\xi)f(\xi)+f'(\xi)=0$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.310

Η συνάρτηση f έχει δεύτερη παράγωγο και παρουσιάζει ακρότατα στα σημεία α, β.

Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος ώστε: $f''(\xi)+f'(\xi)=0$

ΛΥΣΗ

Έχουμε $f''(\xi)+f'(\xi)=0 \quad \Leftrightarrow \quad f''(x)+1\cdot f'(x)=0$

Άρα ως $g(x)=1$ και η αρχική της $G(x)=x$ οπότε $e^{G(x)}=e^{x}$.

Άρα θεωρούμε συνάρτηση $h(x)=e^{x}f'(x)$.

- Η h συνεχής στο [α, β] ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.
- Η h παραγωγίσιμη στο (α, β)
- $$\left.\begin{array}{l} h(\alpha)=e^{\alpha}f'(\alpha) \\ h(\beta)=e^{\beta}f'(\beta) \\ \Sigma\tau\alpha\ \alpha,\beta\ \eta\ f\ \pi\alpha\rho o\upsilon\sigma\iota\acute{\alpha}\zeta\varepsilon\iota\ \alpha\kappa\rho\acute{o}\tau\alpha\tau o \\ \acute{\alpha}\rho\alpha\ f'(\alpha)=f'(\beta)=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \quad h(\alpha)=h(\beta)$$

Οπότε από θ.Rolle υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε:

$$h'(\xi)=0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{\xi}f'(\xi)+e^{\xi}f''(\xi)=0$$

$$\left.\begin{array}{r} e^{\xi}\left(f'(\xi)+f''(\xi)\right)=0 \\ e^{\xi}>0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \quad f'(\xi)+f''(\xi)=0$$

ΜΟΡΦΗ 10η: ΥΠΑΡΞΗ ΣΗΜΕΙΟΥ ΤΗΣ C_f ΠΟΥ Η ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΔΙΕΡΧΕΤΑΙ

ΑΠΟ ΣΗΜΕΙΟ

- Εφαρμόζω το θ.Rolle στην κατάλληλη αρχική συνάρτηση F της f.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.311

Έστω μια συνάρτηση f, συνεχής στο [2,3] παραγωγίσιμη στο (2,3) και ισχύει $f(3)=3f(2)$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(2,3)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\xi,f(\xi))$ να διέρχεται από το σημείο A(1,0).

<u>ΛΥΣΗ</u>

Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει $\xi\in(2,3)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη $\varepsilon: y-f(\xi)=f'(\xi)(x-\xi)$ στο $M(\xi,f(\xi))$ να διέρχεται από το A(1,0).

Δηλαδή:

$$0-f(\xi)=f'(\xi)(1-\xi) \Leftrightarrow -f(\xi)=f'(\xi)-\xi f'(\xi) \Leftrightarrow$$

$$f'(\xi)(1-\xi)+f(\xi)=0 \Leftrightarrow f'(x)(1-x)+f(x)=0 \overset{\cdot(-1)}{\Leftrightarrow}$$

$$f'(x)(x-1)-f(x)=0 \overset{:(x-1)^2}{\Leftrightarrow} \frac{f'(x)(x-1)-f(x)(x-1)'}{(x-1)^2} \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x-1}\right)'=0$$

Άρα αυτή η εξίσωση πρέπει να έχει λύση στο (2,3)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{x-1}$, $\quad x\in[2,3]$

Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $g'(x)=0$ έχει λύση στο (2,3)

Για την g έχουμε:

- Η g είναι συνεχής στο [2,3] ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων
- Η g είναι παραγωγίσιμη στο (2,3)
- $\left.\begin{array}{l} g(2)=\dfrac{f(2)}{1}=f(2) \\ g(3)=\dfrac{f(3)}{2}=\dfrac{2f(2)}{2}=f(2) \end{array}\right\} \Leftrightarrow g(2)=g(3)$

Οπότε από θ.Rolle υπάρχει $\xi\in(2,3)$: $g'(\xi)=0$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.312

Έστω μία συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο [α, β], παραγωγίσιμη στο (α,β) και $f(\alpha)=\alpha$, $f(\beta)=\beta$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi,f(\xi))$ να διέρχεται από το σημείο $P(\xi+1,f(\xi)+1)$

<u>ΛΥΣΗ</u>

Η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο $M(\xi,f(\xi))$ έχει εξίσωση

$$y-f(\xi)=f'(\xi)(x-\xi)$$

Αρκεί να δείξουμε ότι το σημείο P διέρχεται από την (ε) δηλαδή την επαληθεύει:

$$\cancel{f(\xi)}+1-\cancel{f(\xi)}=f'(\xi)\left(\cancel{\xi}+1-\cancel{\xi}\right) \Leftrightarrow 1=f'(\xi) \Leftrightarrow$$

$$f'(\xi)-1=0 \Leftrightarrow f'(x)-1=0 \Leftrightarrow \left(f(x)-x\right)'=0$$

άρα αυτή η εξίσωση πρέπει να έχει λύση στο (α,β)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-x$

Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $g'(x)=0$ έχει λύση στο (α,β)

Για την g έχουμε:

- είναι συνεχής στο [α, β] ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων
- είναι παραγωγίσιμη στο (α, β)
- $\left.\begin{matrix} g(\alpha)=f(\alpha)-\alpha=\alpha-\alpha=0 \\ g(\beta)=f(\beta)-\beta=\beta-\beta=0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \quad g(\alpha)=g(\beta)$

Οπότε από θ.Rolle υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε $g'(\xi)=0$

Πίνακας παραγουσών

Συνάρτηση f (x)	Παράγουσα F(x)
0	c
1	x
x^{ν}	$\frac{1}{\nu+1}x^{\nu+1}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$
$\frac{1}{x}$ x>0 ή x<0	$\ln\lvert x\rvert$
ημx	-συνx
συνx	ημx
α^{x}	$\frac{\alpha^{x}}{\ln\alpha}$
$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^{2}x}$	εφx