ΘΕΩΡΗΜΑ ROLLE

❖ ΘΕΩΡΗΜΑ ROLLE

Αν μια συνάρτηση f είναι :

- συνεχής στο κλειστό [α,β]
- παραγωγίσιμη στο ανοιχτό (α,β)
- f(α)=f(β)

τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$

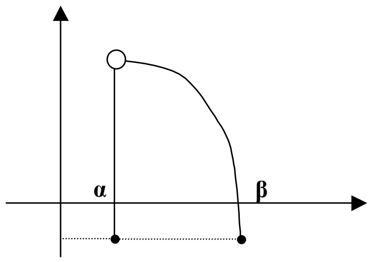
<u>ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ</u> : σημαίνει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha,\beta)$ στο οποίο η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f είναι παράλληλη στον άξονα xx΄.

<u>ΣΧΟΛΙΑ-ΘΕΩΡΙΑ</u>

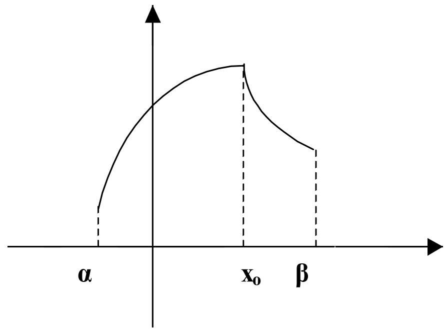
1. Η συνάρτηση f πρέπει να είναι ορισμένη σε διάστημα και όχι σε ένωση διαστημάτων .

2. Αν $f(\rho_1)=f(\rho_2)=0$ δηλαδή οι ρ_1,ρ_2 είναι ρίζες της $f(x)$, τότε η $f'(x)$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (ρ_1,ρ_2). Δηλαδή μεταξύ δυο ριζών της $f(x)$ υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα της $f'(x)$.

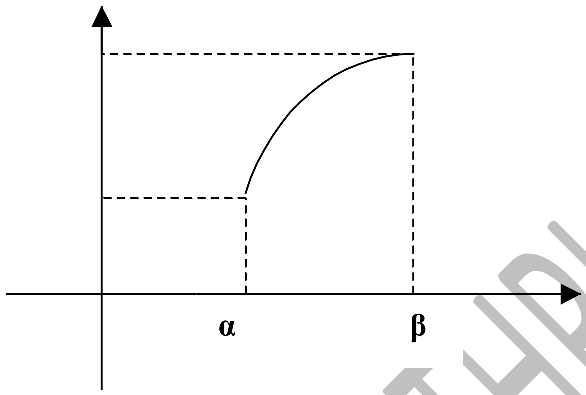
3. Το θεώρημα Rolle ισχύει μόνο όταν ισχύουν και οι τρεις συνθήκες.



Δεν είναι συνεχής στο [α,β]



Δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_o \in (\alpha, \beta)$



$f(\alpha) \neq f(\beta)$

4. Αν η f παραγωγίσιμη στο [α, β] είναι και συνεχής στο [α, β] οπότε εφαρμόζεται το θεώρημα, πληρουμένων και των υπολοίπων προϋποθέσεων φυσικά.

5. ΦΥΣΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ

Αν ένα σώμα κινούμενο πάνω σε έναν άξονα διέρχεται από σημείο Α τη χρονική στιγμή t_1 και

επιστρέφει πάλι στο Α τη χρονική στιγμή t_2, τότε υπάρχει χρονική στιγμή t_o μεταξύ των t_1, t_2

που η ταχύτητα είναι μηδέν.

Γι΄ αυτό και τα σημεία μηδενισμού της f' λέγονται στάσιμα σημεία.

6. Το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει. Δηλαδή οι τρεις συνθήκες του Θ.Rolle είναι ικανές για την εξασφάλιση σημείου x_o στο (α, β) τέτοιο ώστε $f'(x_o)=0$, δεν είναι όμως αναγκαίες π.χ.

$$f(x)=\begin{cases} x^3-3x-5 & x\in[-2,0) \\ 2x^2-4x+3 & x\in[0,5] \end{cases}$$ αν και η f είναι ασυνεχής στο $x_o=0$

έχουμε:

$$f(x)=\begin{cases} 3x^2-3 & x\in[-2,0) \\ 4x-4 & x\in(0,5] \end{cases}$$ και υπάρχουν $x_1=-1\in(-2,0)$ και $x_2=1\in(0,5)$ με

$$f'(x_1)=f'(x_2)=0$$

❖ 3.12.1. ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ROLLE ΚΑΙ ΤΟ ΠΛΗΘΟΣ ΡΙΖΩΝ ΕΞΙΣΩΣΗΣ

1. Να αποδειχθεί ότι μία εξίσωση $f(x)=0$ ***έχει τουλάχιστον κ ρίζες.***

- Για την αντιμετώπιση αυτού του ερωτήματος είτε εφαρμόζουμε για την f το Θ.BOLZANO σε κ κατάλληλα διαστήματα είτε εφαρμόζουμε το Θ.ROLLE (κ- φορές) σε κ κατάλληλα διαστήματα σε μια αρχική συνάρτηση F της f ώστε $F'(x)=f(x)$

▪ Πιο συγκεκριμένα:

Αν θέλουμε να δείξουμε ότι η $f(x)=0$ ***έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (α, β)*** τότε χρησιμοποιούμε:

- Το θεώρημα BOLZANO για την f στο [α, β] ή
- Το θεώρημα ROLLE για την αρχική F της f (όταν δεν βρίσκουμε το πρόσημο $f(\alpha)\cdot f(\beta)$ στο [α, β]) ή
- Το σύνολο τιμών της f.
- Την προφανή ρίζα της f (αν υπάρχει)

2. Να αποδειχθεί ότι μία εξίσωση $f(x)=0$ ***έχει το πολύ κ ρίζες.***

- Για την αντιμετώπιση αυτού του προβλήματος εργαζόμαστε ως εξής:

  Υποθέτουμε ότι υπάρχουν κ+1 τουλάχιστον ρίζες

  $\rho_1 < \rho_2 < \ldots\ldots\ldots\ldots < \rho_\kappa < \rho_{\kappa+1}$

  Τότε το θ.Rolle για την f στα διαστήματα $[\rho_1,\rho_2],[\rho_2,\rho_3],\ldots\ldots,[\rho_\kappa,\rho_{\kappa+1}]$ δίνει για την f' κ ρίζες τις $\xi_1 \in (\rho_1,\rho_2),\ldots\ldots,\xi_\kappa \in (\rho_\kappa,\rho_{\kappa+1})$.

  Αν το αποτέλεσμα αυτό δεν οδηγεί σε άτοπο τότε συνεχίζουμε το θ.Rolle για την f' στα διαστήματα $[\xi_1,\xi_2],[\xi_2,\xi_3],\ldots\ldots\ldots,[\xi_{\kappa-1},\xi_\kappa]$

  Έτσι η f'' θα έχει κ-1 τουλάχιστον ρίζες τα προηγούμενα (ανοικτά όμως) διαστήματα. Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο, αν χρειαστεί, μέχρι να καταλήξουμε σε άτοπο.

> **Πιο συγκεκριμένα:**

Αν θέλουμε να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ ***έχει μία το πολύ ρίζα*** στο (α, β) τότε χρησιμοποιούμε:

- Τη μονοτονία της f
- Το θεώρημα Rolle για την f στο [α, β] μέχρι να καταλήξουμε σε άτοπο.

3. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x)=0$ ***έχει ακριβώς κ ρίζες.***

- Για την αντιμετώπιση αυτού του προβλήματος συνδυάζουμε τα δύο προηγούμενα. Αποδεικνύουμε δηλαδή την ύπαρξη κ ριζών και στη συνέχεια ότι δεν μπορεί να υπάρχουν κ+1 ρίζες.

> **Πιο συγκεκριμένα:**

Αν θέλουμε να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ***ακριβώς μια ρίζα*** στο (α,β) τότε αρκεί να δείξουμε ότι έχει τουλάχιστον μια και το πολύ μία ρίζα με κατάλληλο συνδυασμό των δύο προηγούμενων περιπτώσεων.

ΔΕΝ ΞΕΧΝΑΜΕ: Αν η f έχει τουλάχιστον κ ρίζες στο (α, β) τότε η f' έχει τουλάχιστον κ-1 ρίζες στο (α, β).

ΑΡΧΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

- Όταν θέλουμε να δείξουμε μια σχέση της μορφής :

$$f'(\xi)=c$$

τότε θεωρούμε τη βοηθητική συνάρτηση: $g(x)=f(x)-cx$ στην οποία ενδέχεται να εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle.

- Όταν θέλουμε να δείξουμε μια σχέση της μορφής:

$$f'(\xi)=cf(\xi)$$

τότε θεωρούμε τη βοηθητική συνάρτηση : $g(x)=e^{-cx}f(x)$ και εφαρμόζουμε το θεώρημα Rolle.

- Όταν θέλουμε να δείξουμε μία σχέση της μορφής:

$$f'(\xi)(\xi-c)=f(\xi)$$

τότε θεωρούμε τη βοηθητική συνάρτηση: $g(x)=\dfrac{f(x)}{x-c}$ και εφαρμόζουμε το θεώρημα Rolle.

- Όταν θέλουμε να δείξουμε μία σχέση της μορφής

$$\xi f'(\xi)=\nu f(\xi)$$

τότε θεωρούμε τη βοηθητική συνάρτηση: $g(x)=\dfrac{f(x)}{x^{\nu}}$ και εφαρμόζουμε το θεώρημα Rolle.

- Όταν θέλουμε να δείξουμε σχέση της μορφής:

$$f'(\xi)(c-\xi)=f(\xi)$$

τότε θεωρούμε τη βοηθητική συνάρτηση: $g(x)=(x-c)f(x)$ και εφαρμόζουμε το θεώρημα Rolle.

- Όταν θέλουμε να δείξουμε σχέση της μορφής:

$$f'(\xi) = \nu\xi^{\nu-1}$$

τότε θεωρούμε τη βοηθητική συνάρτηση: $g(x) = f(x) - x^{\nu}$ και εφαρμόζουμε το θεώρημα Rolle.

❖ Αν η $f'(x)$ έχει δύο ακριβώς ρίζες $\rho_1 \neq \rho_2$ στο [α, β] στο οποίο η f ικανοποιεί το θ.Rolle τότε η f στο διάστημα (ρ_1, ρ_2) έχει το πολύ μία ρίζα (διότι αν είχε δύο ρίζες π.χ. x_1, x_2 τότε η f' θα είχε ρίζα $\rho_3 \in (x_1, x_2)$ που είναι άτοπο).

➢ ***ΜΟΡΦΕΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΣΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ROLLE***

ΜΟΡΦΗ 1η : Έλεγχος για την ισχύ του θ.Rolle – Εύρεση του $\xi \in (\alpha, \beta)$

- Εξετάζουμε αν ισχύουν οι τρεις προϋποθέσεις του θεωρήματος. Αν ζητούν να βρούμε και το (τα) $\xi \in (\alpha, \beta)$: $f'(\xi) = 0$ τότε λύνουμε την εξίσωση $f'(\xi) = 0$ με $\xi \in (\alpha, \beta)$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^3 - 4x^2 + 5x + 1$. Να δείξετε ότι στο διάστημα (0,1) υπάρχει ξ τέτοιος ώστε $f'(\xi) = 0$.

<u>ΛΥΣΗ</u>

Για την συνάρτηση f ισχύει:

- Η f συνεχής στο [0,1] ως πολυωνυμική
- Η f παραγωγίσιμη στο (0,1) με $f'(x) = -3x^2 - 8x + 5$

- $$\left.\begin{array}{r} f(0)=1 \\ f(1)=-1^3-4\cdot 1^2+5\cdot 1+1=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad f(0)=f(1)$$

Επομένως από θ.Rolle υπάρχει $\xi \in (0,1)$ ώστε:

$$f'(\xi)=0 \quad \Leftrightarrow \quad -3\xi^2-8\xi+5=0 \quad \left\langle \begin{array}{l} \xi_1=\dfrac{-4+\sqrt{31}}{3} \\ \xi_2=\dfrac{-4-\sqrt{31}}{3} \end{array}\right.$$

- Το ζητούμενο $\xi=\dfrac{-4+\sqrt{31}}{3}\in(0,1)$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο [-1,2] και παραγωγίσιμη στο (-1,2) με $f(-1)=1$, $f(2)=-4$. Να δείξετε ότι:

i. Για την συνάρτηση $g(x)=f(x)+x^2$ ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θ.Rolle στο [-1,2].

ii. Υπάρχει $\xi\in(-1,2)$ ώστε $f'(\xi)=-2\xi$.

<u>ΛΥΣΗ</u>

Η $g(x)$ είναι συνεχής στο [-1,2] ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

Ακόμη είναι παραγωγίσιμη στο (-1,2) με $g'(x)=f'(x)+2x$

$$\left.\begin{array}{r} g(-1)=f(-1)+(-1)^2=-1+1=0 \\ g(2)=f(2)+2^2=-4+4=0 \end{array}\right| \Leftrightarrow \quad g(-1)=g(2)=0$$

Άρα από θ.Rolle υπάρχει $\xi\in(-1,2)$ ώστε

$$g'(\xi)=0 \quad \Leftrightarrow \quad f'(\xi)+2\xi=0 \quad \Leftrightarrow \quad f'(\xi)=-2\xi$$

ΜΟΡΦΗ 2η: Προσδιορισμός παραμέτρων ώστε να ισχύει το θ.Rolle

- Απαιτούμε να ισχύουν και οι τρεις προϋποθέσεις του θεωρήματος άρα κατασκευάζουμε εξισώσεις τις οποίες και λύνουμε.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3-2\alpha x^2+3x+\alpha$. Να βρείτε τον α ώστε να εφαρμόζεται το θ.Rolle στο διάστημα [0,1].

ΛΥΣΗ

Η f είναι συνεχής στο [0,1] ως πολυωνυμική.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο (0,1) με $f'(x)=3x^2-4\alpha x+3$

$$\left.\begin{array}{r} f(0)=\alpha \\ f(1)=1^3-2\alpha\cdot 1+3+\alpha=4-\alpha \end{array}\right| \Leftrightarrow \quad f(0)=f(1) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha=4-\alpha \quad \Leftrightarrow \quad 2\alpha=4 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha=2$$

Για α=2 εφαρμόζεται το θ.Rolle οπότε υπάρχει ένας τουλάχιστον $\xi\in(0,1)$ ώστε

$$f'(\xi)=0 \quad \Leftrightarrow \quad 3\xi^2-8\xi+3=0 \quad \Leftrightarrow \quad \xi_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{7}}{3}$$

Εμείς δεχόμαστε για $\xi=\dfrac{4-\sqrt{7}}{3}\in(0,1)$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} x^2+\mu x+\nu & x\in[-1,0] \\ \rho x^2+4x+4 & x\in(0,1] \end{cases}$$

Να βρείτε τις τιμές των μ, ν, ρ ώστε να εφαρμόζεται το θ.Rolle για την f.

ΛΥΣΗ

Η f πρέπει να είναι συνεχής στο [-1,1]. Επειδή η f είναι πολλαπλού τύπου πρέπει να ελέγξω τη συνέχεια στο σημείο αλλαγής στο $x_o=0$

$$\left.\begin{aligned} f(0)&=\nu \\ \lim_{x\to0^-} f(x)&=\lim_{x\to0^-}\left(x^2+\mu x+\nu\right)=\nu \\ \lim_{x\to0^+} f(x)&=\lim_{x\to0^+}\left(\rho x^2+4x+4\right)=4 \end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

Η f είναι συνεχής στο $x_o=0 \Leftrightarrow$

$$f(0)=\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^+} f(x)$$

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στα (-1,0) και (0,1) αρκεί να είναι παραγωγίσιμη και στο 0.

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{\rho x^2+4x+4-4}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\rho x^2+2x}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{x(\rho x+4)}{x}=\lim_{x\to0^+}(\rho x+4)=4$$

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{x^2+\mu x+4-4}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{x(x+\mu)}{x}=\lim_{x\to0^-}(x+\mu)=\mu$$

Πρέπει $\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\Leftrightarrow\mu=4$

Πρέπει $f(-1)=f(1) \Leftrightarrow (-1)^2+4\cdot(-1)+4=\rho\cdot1^2+4\cdot1+4 \Leftrightarrow$
$1-4+4=\rho+4+4 \Leftrightarrow \rho+8=1 \Leftrightarrow \rho=-7$

ΜΟΡΦΗ 3η: ΥΠΑΡΞΗ ξ ώστε να ισχύει μια συνθήκη

- Εφαρμόζουμε το θεώρημα Rolle για τη συνάρτηση που μας δίνεται.

  Δεν ξεχνάμε ότι $f(\alpha)=f(\beta)$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5

i. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x-\alpha)^{\mu}(x-\beta)^{\nu}$, $\mu,\nu\in R^*$

   Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε: $\xi=\dfrac{\nu\alpha+\mu\beta}{\mu+\nu}$

ii. Να αποδείξετε ότι το παραπάνω ξ χωρίζει το διάστημα [α, β] σε λόγο $\dfrac{\mu}{\nu}$ δηλαδή ισχύει $\dfrac{\xi-\alpha}{\beta-\xi}=\dfrac{\mu}{\nu}$

ΛΥΣΗ

i. Η f είναι συνεχής στο [α, β] ως πολυωνυμική

Η f είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) με

$$f'(x)=\mu(x-\alpha)^{\mu-1}(x-\beta)^{\nu}+\nu(x-\alpha)^{\mu}(x-\beta)^{\nu-1}$$

$$\left.\begin{matrix} f(\alpha)=0 \\ f(\beta)=0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \quad f(\alpha)=f(\beta)=0$$

Οπότε από θεώρημα Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε

$$f'(\xi)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu(\xi-\alpha)^{\mu-1}(\xi-\beta)^{\nu}+\nu(\xi-\alpha)^{\mu}(\xi-\beta)^{\nu-1}=0 \quad \overset{:(\xi-\alpha)^{\mu-1}\cdot(\xi-\beta)^{\nu-1}}{\Leftrightarrow}$$

$$\mu(\xi-\beta)+\nu(\xi-\alpha)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu\xi+\nu\xi=\mu\beta+\nu\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \xi(\mu+\nu)=\nu\alpha+\mu\beta \quad \Leftrightarrow$$

$$\xi=\frac{\nu\alpha+\mu\beta}{\mu+\nu}$$

ΣΧΟΛΙΟ:

$$\xi-\alpha\neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \xi\neq\alpha$$

ii. Έχουμε:

$$\xi=\frac{\nu\alpha+\mu\beta}{\nu+\mu} \Leftrightarrow \quad \mu\xi+\nu\xi=\nu\alpha+\mu\beta \quad \Leftrightarrow$$

$$\nu\xi-\nu\alpha=\mu\beta-\mu\xi \quad \Leftrightarrow \quad \nu(\xi-\alpha)=\mu(\beta-\xi) \quad \Leftrightarrow \frac{\xi-\alpha}{\beta-\xi}=\frac{\mu}{\nu}$$

ΜΟΡΦΗ 4η: ΣΧΕΣΕΙΣ ΡΙΖΩΝ ΤΗΣ f(x) ΚΑΙ ΤΗΣ $f'(x)$

- Αν ρ_1,ρ_2 ρίζες της f διαδοχικές, δηλαδή

$$\left.\begin{matrix} f(\rho_1)=0 \\ f(\rho_2)=0 \end{matrix}\right| \Rightarrow \text{ από θ.Rolle υπάρχει } \xi\in(\rho_1,\rho_2):\ f'(\xi)=0$$

ΒΑΣΙΚΗ ΑΣΚΗΣΗ

Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ να δείξετε ότι:

i. Μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της f στο Δ υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της f'

ii. Μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της f' στο Δ υπάρχει μία το

ΛΥΣΗ

i. Έστω ρ_1, ρ_2 δύο διαδοχικές ρίζες της f, δηλαδή:

$f(\rho_1)=f(\rho_2)=0$

- Η f είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]\subseteq\Delta$
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(\rho_1, \rho_2)\subseteq\Delta$
- $f(\rho_1)=f(\rho_2)=0$

από θ.Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\rho_1,\rho_2)$:

$$f'(\xi)=0$$

i. Για να αποδείξουμε <u>το πολύ</u> θα χρησιμοποιήσουμε το θ.Rolle και θα πρέπει να καταλήξουμε σε άτοπο:

Έστω x_1,x_2 δύο διαδοχικές ρίζες της f' δηλαδή $f'(x_1)=f'(x_2)=0$

Έστω ότι η f έχει δύο διαδοχικές ρίζες στο (x_1,x_2) τις ρ_1, ρ_2 με $x_1<\rho_1<\rho_2<x_2$ και $f(\rho_1)=f(\rho_2)=0$

Τότε από το (α) ερώτημα και με βάση το θ.Rolle υπάρχει $\xi\in(\rho_1,\rho_2)$: $f'(\xi)=0$ άτοπο.

Άρα η f έχει το πολύ μία πραγματική ρίζα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$

Να δείξετε ότι η $f'(x)=0$ έχει όλες τις ρίζες πραγματικές.

ΛΥΣΗ

Παρατηρούμε ότι $f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=0$ και επειδή η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη, εφαρμόζεται το θ.Rolle για την $f(x)$ στα διαστήματα [1,2], [2,3], [3,4].

Άρα υπάρχει από μία τουλάχιστον ρίζα της $f'(x)=0$ για κάθε ένα από τα διαστήματα (1,2), (2,3), (3,4). Επειδή η f είναι $4^{ου}$ βαθμού η f' είναι $3^{ου}$ βαθμού.

Άρα f' είναι $3^{ου}$ βαθμού

Και f' έχει τρεις τουλάχιστον ρίζες

Η f έχει ακριβώς τρεις ρίζες.

ΜΟΡΦΗ 5η : ΝΑ ΔΕΙΞΟΥΜΕ ΟΤΙ Η $f(x)$ ή $f(x)=0$ ΕΧΕΙ κ ΤΟ ΠΟΛΥ ΡΙΖΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ

- Χρησιμοποιούμε την εις άτοπο επαγωγή. Έστω ότι έχει κ+1 ρίζες πραγματικές και εφαρμόζουμε το θ.Rolle κ φορές μέχρι να καταλήξουμε σε άτοπο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7

Να δείξετε ότι η εξίσωση $e^x=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ με α, β, γ $\in R$ έχει το πολύ τρεις πραγματικές ρίζες.

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε $f(x)=e^x-\alpha x^2-\beta x-\gamma \quad x\in R$

Έστω ότι η f έχει τέσσερις ρίζες πραγματικές ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4 με $\rho_1<\rho_2<\rho_3<\rho_4$ και $f(\rho_1)=f(\rho_2)=f(\rho_3)=f(\rho_4)=0$.

Επειδή f συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και η f παραγωγίσιμη με $f'(x)=e^x-2\alpha x-\beta$ εφαρμόζουμε το θ.Rolle σε καθένα από τα διαστήματα $[\rho_1, \rho_2]$, $[\rho_2, \rho_3]$, $[\rho_3, \rho_4]$.

Επομένως υπάρχουν $\xi_1\in(\rho_1,\rho_2)$, $\xi_2\in(\rho_2,\rho_3)$ και $\xi_3\in(\rho_3,\rho_4)$ ώστε

$$f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=f'(\xi_3)=0$$

Για την $f'(x)=e^x-2\alpha x-\beta$ γνωρίζουμε ότι είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη με $f''(x)=e^x-2\alpha$

Οπότε μπορούμε να εφαρμόσουμε το θ.Rolle για την f' στα διαστήματα $[\xi_1,\xi_2]$ και $[\xi_2,\xi_3]$ και προκύπτουν $\theta_1\in(\xi_1,\xi_2)$ και $\theta_2\in(\xi_2,\xi_3)$ ώστε $f''(\theta_1)=f''(\theta_2)=0$

Παρόμοια θα κινηθούμε και για την $f''(x)=e^x-2\alpha$ η οποία είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με $f^{(3)}(x)=e^x$ οπότε εφαρμόζουμε το θ.Rolle στο διάστημα $[\theta_1, \theta_2]$ και προκύπτει:

$\gamma\in(\theta_1,\theta_2)$ ώστε $f^{(3)}(\gamma)=0 \Leftrightarrow \quad e^{\gamma}=0 \quad$ άτοπο γιατί πάντα $e^x>0$

Επομένως η f έχει το πολύ τρεις πραγματικές ρίζες.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}+4x+\lambda=0$ έχει το πολύ μία ρίζα στο διάστημα (2,3) για κάθε $\lambda\in R$.

<u>ΛΥΣΗ</u>

Έστω ότι η δοσμένη εξίσωση έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο (2,3) τις ρ_1 και ρ_2 με $\rho_1<\rho_2$. Είναι δηλαδή $2<\rho_1<\rho_2<3$. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}+4x+\lambda \qquad x\in R$$

- Η f είναι συνεχής στο $[\rho_1,\rho_2]$ ως πολυωνυμική
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_1,ρ_2) με $f'(x)=x^2-5x+4$
- $f(\rho_1)=f(\rho_2)=0$

Άρα από θ.Rolle υπάρχει $\xi\in(\rho_1,\rho_2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$

Άρα $\quad f'(\xi)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \xi^2-5\xi+4=0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}\xi=1\\ \xi=4\end{cases}$

Αυτό όμως είναι άτοπο διότι $\xi\in(2,3)$

Άρα η δοσμένη συνάρτηση έχει το πολύ μία ρίζα στο (2,3).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9

Έστω μία συνάρτηση $f:R\to R$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη. Αν η εφαπτομένη της $C_{f'}$ σε οποιοδήποτε σημείο της δεν είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon: y=3x+1$ να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=\frac{3x^2}{2}+7x-\lambda$, $\lambda\in R$ έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες.

<u>ΛΥΣΗ</u>

Για κάθε $x\in R$ έχουμε $f''(x)\neq\lambda \quad\Leftrightarrow\quad f''(x)\neq 3$

Η εξίσωση $f(x)=\frac{3x^2}{2}+7x-\lambda$ γράφεται $f(x)-\frac{3x^2}{2}-7x+\lambda=0$

Ονομάζουμε $g(x)=f(x)-\frac{3x^2}{2}-7x+\lambda$ και υποθέτουμε ότι η εξίσωση $g(x)=0$ έχει τρεις πραγματικές ρίζες x_1, x_2, x_3 με $x_1<x_2<x_3$.

Η g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη σε καθένα από τα διαστήματα $[x_1, x_2]$, $[x_2,x_3]$ με $g'(x)=f'(x)-3x-7$ και $g(x_1)=g(x_2)=g(x_3)=0$

Άρα από θ.Rolle υπάρχουν $\xi_1\in(x_1,x_2)$ και $\xi_2\in(x_2,x_3)$ ώστε

$g'(\xi_1)=0$ και $g'(\xi_2)=0$

Όμοια η $g'(x)=f'(x)-3x-7$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\xi_1, \xi_2]$ με $g''(x)=f''(x)-3$

Άρα και πάλι από θ.Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o\in(\xi_1,\xi_2)$ ώστε

$g''(x_o)=0 \quad\Leftrightarrow\quad f''(x_o)-3=0 \quad\Leftrightarrow\quad f''(x_o)=3$ άτοπο από την υπόθεση

Οπότε η δοθείσα εξίσωση έχει δύο το πολύ ρίζες.

ΜΟΡΦΗ 6η: ΥΠΑΡΞΗ ΜΟΝΑΔΙΚΟΤΗΤΑΣ ΡΙΖΑΣ

- δείχνουμε ταυτόχρονα ότι έχει:

$$\left.\begin{array}{l}\text{i. τουλάχιστον μία ρίζα}\\ \text{ii. το πολύ μία ρίζα}\end{array}\right\}\ \text{Άρα ακριβώς μία ρίζα}$$

➢ Για να δείξουμε το (i) χρησιμοποιούμε:

- Το θεώρημα BOLZANO ή ενδιάμεσων τιμών
- Σύνολο τιμών
- Προφανής ρίζα (με δοκιμή)

  Συνήθεις ρίζες είναι το 0,1, e, π
- Το θεώρημα Rolle στην αρχική
- Πολυωνυμική συνάρτηση περιττού βαθμού

➢ Για να δείξουμε το (ii) χρησιμοποιούμε:

- Το θεώρημα Rolle και καταλήγουμε σε άτοπο

- Γνησίως μονότονη
- Από κάποιο δεδομένο της υπόθεσης

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10

Έστω $f:[\alpha,\beta]\to R$ με α, β>0 και $\frac{1}{\beta}<f(x)<\frac{1}{\alpha}$ και $f'(x)\neq\frac{1}{\alpha\beta}$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

Να δείξετε ότι υπάρχει μόνο ένας αριθμός $x_o\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f(x_o)=\frac{1}{\alpha\beta}x_o$.

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-\frac{1}{\alpha\beta}x$

- Ένα τουλάχιστον $x_o\in(\alpha,\beta)$

Η g είναι συνεχής στο [α, β] ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων

$$g(\alpha)=f(\alpha)-\frac{1}{\alpha\beta}\alpha=f(\alpha)-\frac{1}{\beta}$$
$$g(\beta)=f(\beta)-\frac{1}{\alpha\beta}\beta=f(\beta)-\frac{1}{\alpha}$$

Όμως : $\frac{1}{\beta}<f(x)<\frac{1}{\alpha}$

Για x = α $\frac{1}{\beta}<f(\alpha)<\frac{1}{\alpha}\ \Rightarrow\ \frac{1}{\beta}<f(\alpha)\ \Rightarrow\ f(\alpha)-\frac{1}{\beta}>0$

Για x = β $\frac{1}{\beta}<f(\beta)<\frac{1}{\alpha}\ \Rightarrow\ f(\beta)<\frac{1}{\alpha}\ \Rightarrow\ f(\beta)-\frac{1}{\alpha}<0$

Άρα $\left.\begin{matrix} g(\alpha)>0 \\ g(\beta)<0\end{matrix}\right\}\Rightarrow$ $g(\alpha)\cdot g(\beta)<0$ άρα από **Θ.BOLZANO** υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o\in(\alpha,\beta)$ ώστε

$$g(x_o)=0\ \Leftrightarrow\ f(x_o)-\frac{1}{\alpha\beta}=0\ \Leftrightarrow$$

- Ένα το πολύ x_o

Έστω ότι η g έχει δύο ρίζες στο (α, β) τις x_1, x_2 δηλαδή $g(x_1)=g(x_2)=0$

Στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με $g'(x)=f'(x)-\frac{1}{\alpha\beta}$

Άρα από θ. Rolle υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)$ τέτοιο ώστε

$g'(\xi)=0 \quad \Leftrightarrow \quad f'(\xi)-\frac{1}{\alpha\beta}=0 \quad \Leftrightarrow \quad f'(\xi)=\frac{1}{\alpha\beta}$ άτοπο από υπόθεση

Άρα η g έχει ακριβώς μία ρίζα στο (α, β)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 11

Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύουν $x^2f''(x)\neq -1$ για κάθε $x\in R$ και $f(2)-f(1)=\ln 2-1$. Να δείξετε ότι οι $C_{f'}$ και $C_{g'}$ όπου $g(x)=\ln x-x$ έχουν ένα κοινό σημείο.

<u>ΛΥΣΗ</u>

Έστω η συνάρτηση $h(x)=f(x)-g(x) \quad \Leftrightarrow \quad h(x)=f(x)-\ln x+x, \quad x>0$

Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f'(x)=g'(x) \quad \Leftrightarrow \quad f'(x)-g'(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad h'(x)=0$ έχει μία μόνο λύση στο $(0,+\infty)$.

- Για την h ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο [1,2] αφού:
  - Είναι συνεχής στο [1,2] ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων (f συνεχής ως παραγωγίσιμη)
  - Είναι παραγωγίσιμη στο (1,2) με $h'(x)=f'(x)-\frac{1}{x}+1$
  - $h(1)=f(1)-\ln 1+1=f(1)+1$

    $h(2)=f(2)-\ln 2+2$

Όμως $f(2)-f(1)=\ln 2-1 \quad \overset{+(-1)}{\Rightarrow} \quad f(2)-f(1)-1=\ln 2-1-1 \quad \Leftrightarrow$

$$f(2)-f(1)-1=\ln 2-2 \Leftrightarrow f(2)-\ln 2+2=f(1)+1 \Leftrightarrow h(1)=h(2)$$

Άρα από θ. Rolle υπάρχει $x_o \in (1,2)$ ώστε $h'(x_o)=0$

- Έστω ότι η $h'(x)=0$ έχει δύο λύσεις στο (1,2) τις x_1, x_2 με $x_1<x_2$ και $h'(x_1)=h'(x_2)=0$

  Η h είναι παραγωγίσιμη στο $[x_1, x_2]$ με $h''(x)=f''(x)+\frac{1}{x^2}$

Άρα από θ.Rolle υπάρχει $\xi \in (x_1,x_2)$ ώστε

$$h''(\xi)=0 \Leftrightarrow f''(\xi)+\frac{1}{\xi^2}=0 \Leftrightarrow f''(\xi)=-\frac{1}{\xi^2} \Leftrightarrow \xi^2 f''(\xi)=-1$$

Άτοπο από την υπόθεση

Άρα η εξίσωση $h'(x)=0$ έχει μια μόνο λύση στο $(0,+\infty)$.

ΜΟΡΦΗ 7η: ΥΠΑΡΞΗ ΡΙΖΑΣ ΤΗΣ $f''(x)$ ή $f^{(3)}(x)$ ....

- Εφαρμόζουμε το θεώρημα Rolle για την παράγωγο της αμέσως προηγούμενης τάξης.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 12

Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο [α, β] με α>0 και $f(\alpha)=\frac{1}{\beta\gamma}$, $f(\beta)=\frac{1}{\alpha\gamma}$, $f(\gamma)=\frac{1}{\alpha\beta}$, $\gamma \in (\alpha,\beta)$.

Να δείξετε ότι:

i. Υπάρχουν $\kappa \in (\alpha,\gamma)$ και $\lambda \in (\gamma,\beta)$ ώστε

$$f'(\kappa)=\frac{f(\kappa)}{\kappa} \quad , \quad f'(\lambda)=\frac{f(\lambda)}{\lambda}$$

ii. Αν η ευθεία που ορίζεται από τα σημεία Α(κ, f(κ)) Β(λ, f(λ)) διέρχεται από το σημείο Ο(0,0)

   τότε υπάρχει $\xi \in (\kappa,\lambda)$ ώστε $f''(\xi)=0$

ΛΥΣΗ

Έχουμε :

$$\left.\begin{array}{lll} f(\alpha)=\dfrac{1}{\beta\gamma} & \Leftrightarrow & \dfrac{f(\alpha)}{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha\beta\gamma} \\ f(\beta)=\dfrac{1}{\alpha\gamma} & \Leftrightarrow & \dfrac{f(\beta)}{\beta}=\dfrac{1}{\alpha\beta\gamma} \\ f(\gamma)=\dfrac{1}{\alpha\beta} & \Leftrightarrow & \dfrac{f(\gamma)}{\gamma}=\dfrac{1}{\alpha\beta\gamma} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \frac{f(\alpha)}{\alpha}=\frac{f(\beta)}{\beta}=\frac{f(\gamma)}{\gamma}$$

θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}, \quad x\in[\alpha,\beta]$

Για τη συνάρτηση εφαρμόζουμε το θ.Rolle στα διαστήματα [α, γ] και [γ, β] στα οποία η g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με:

$$g'(x)=\frac{f'(x)\cdot x-f(x)}{x^2} \quad h(\beta)=e^{\beta}f'(\beta)$$

Οπότε υπάρχουν $\kappa\in(\alpha,\gamma)$ και $\lambda\in(\gamma,\beta)$ ώστε:

$$g'(\kappa)=0 \qquad \text{και} \qquad g'(\lambda)=0$$

$$g'(\kappa)=0 \Leftrightarrow \frac{\kappa f'(\kappa)-f(\kappa)}{\kappa^2}=0 \Leftrightarrow \kappa f'(\kappa)-f(\kappa)=0 \Leftrightarrow \kappa f'(\kappa)=f(\kappa) \Leftrightarrow f'(\kappa)=\frac{f(\kappa)}{\kappa}$$

και

$$g'(\lambda)=0 \Leftrightarrow \frac{\lambda f'(\lambda)-f(\lambda)}{\lambda^2}=0 \Leftrightarrow \lambda f'(\lambda)-f(\lambda)=0 \Leftrightarrow \lambda f'(\lambda)=f(\lambda) \Leftrightarrow f'(\lambda)=\frac{f(\lambda)}{\lambda}$$

ii. Η ευθεία που ορίζουν τα σημεία Α και Β έχει εξίσωση:

$$y-f(\kappa)=\lambda_{AB}(x-\kappa)$$

$$\lambda_{AB}=\frac{f(\lambda)-f(\kappa)}{\lambda-\kappa} \quad \text{και} \quad O(0,0) \quad \text{σημείο} \quad \text{της} \quad \text{ευθείας} \quad \text{άρα}$$

$$0-f(\kappa)=\frac{f(\lambda)-f(\kappa)}{\lambda-\kappa}(0-\kappa) \Leftrightarrow -(\lambda-\kappa)f(\kappa)=(f(\lambda)-f(\kappa))\cdot(-\kappa) \Leftrightarrow$$

$$-\lambda f(\kappa)+\cancel{\kappa f(\kappa)}=-\kappa f(\lambda)+\cancel{\kappa f(\kappa)} \Leftrightarrow \lambda f(\kappa)=\kappa f(\lambda) \Leftrightarrow \frac{f(\kappa)}{\kappa}=\frac{f(\lambda)}{\lambda} \Leftrightarrow$$

$$f'(\kappa)=f'(\lambda)$$

Η f' είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο [κ, λ] και $f'(\kappa)=f'(\lambda)$

Άρα από θ.Rolle υπάρχει $\xi\in(\kappa,\lambda)$ ώστε $f''(\xi)=0$.

Β΄ τρόπος:

$$\left.\begin{aligned}\lambda_{OA}&=\frac{f(\kappa)-0}{\kappa-0}=\frac{f(\kappa)}{\kappa}\\ \lambda_{OB}&=\frac{f(\lambda)-0}{\lambda-0}=\frac{f(\lambda)}{\lambda}\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\lambda_{OA}=\lambda_{OB} \Leftrightarrow \frac{f(\kappa)}{\kappa}=\frac{f(\lambda)}{\lambda} \Leftrightarrow$$

$$f'(\kappa)=f'(\lambda)$$

και συνεχίζουμε όπως παραπάνω.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 13

Έστω μία συνάρτηση f η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f(1)=1$, $f(2)=4-\ln 2$, $f(e)=e^2-1$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,e)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi)=\frac{1}{\xi^2}+2$.

ΛΥΣΗ

Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f''(x)=\frac{1}{x^2}+2$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (1,e). Για κάθε $x\in(1,e)$ έχουμε:

$$f''(x)=\frac{1}{x^2}+2 \Leftrightarrow f''(x)-\frac{1}{x^2}-2=0 \Rightarrow \left(f'(x)+\frac{1}{x}-2x\right)'=0 \Leftrightarrow \left(f(x)+\ln x-x^2\right)''=0$$

Έστω λοιπόν η συνάρτηση $g(x)=f(x)+\ln x-x^2$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,e)$ ώστε $g''(\xi)=0$

Για τη συνάρτηση g ισχύουν οι προϋποθέσεις του θ.Rolle σε καθένα από τα διαστήματα [1,2] και [2,e] δηλαδή:

Η g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στα διαστήματα [1,2] και [2,e] (συνεχής είναι αφού είναι παραγωγίσιμη) και

$$\left.\begin{array}{r} g(1)=f(1)+\ln 1-1=f(1)-1=1-1=0 \\ g(2)=f(2)+\ln 2-2^2=4-\ln 2+\ln 2-4=0 \\ g(e)=f(e)+\ln e-e^2=e^2-1+1-e^2=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \quad g(1)=g(2)=g(e)=0$$

Άρα από θ.Rolle υπάρχουν $\xi_1 \in (1,2)$ και τέτοια ώστε $g'(\xi_1)=0$ και $g'(\xi_2)=0$

Ακόμη η g' είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[\xi_1,\xi_2]$ και $g'(\xi_1)=g'(\xi_2)=0$ οπότε πάλι από θ.Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\xi_1,\xi_2) \subseteq (1,e)$ τέτοιο ώστε: $g''(\xi)=0$.

ΜΟΡΦΗ 8η: ΥΠΑΡΞΗ ΡΙΖΑΣ ΤΗΣ f Ή ΤΗΣ $f(x)=0$

- Εφαρμόζω το θ.Rolle σε μία αρχική συνάρτηση F της f

  $(F'(x)=f(x))$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 14

Έστω $f:[\alpha,\beta]\to R$ ισχύουν:

i. Η f είναι συνεχής στο [α, β]

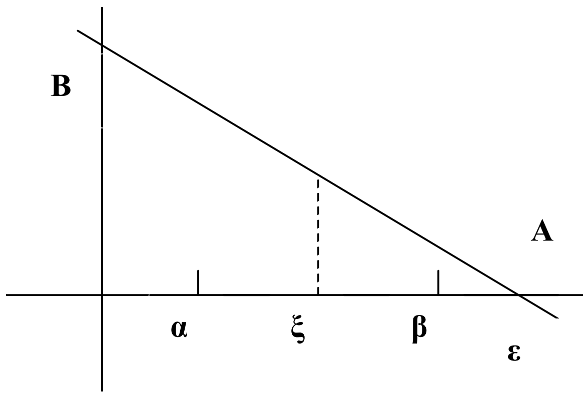
ii. Η f είναι παραγωγίσιμη στο (α, β)

iii. 0 < α < β και $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$

iv. $\dfrac{f(\alpha)}{\beta}=\dfrac{f(\beta)}{\alpha}$

Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε το $M(\xi,f(\xi))$ να είναι το μέσο του τμήματος που ορίζει η εφαπτομένη της C_f στο Μ με τους άξονες.

ΛΥΣΗ



1ος τρόπος

Η εξίσωση εφαπτομένης (ε) της C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ ισούται:

$$y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi) \qquad (1)$$

Έχουμε $\frac{f(\alpha)}{\beta} = \frac{f(\beta)}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha f(\alpha) = \beta f(\beta)$

Θεωρώ συνάρτηση $g(x) = xf(x)$ η οποία ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θ.Rolle στο [α, β] αφού είναι συνεχής στο [α, β], παραγωγίσιμη στο (α, β) με $g'(x) = f(x) + xf'(x)$ και $g(\alpha) = g(\beta)$ οπότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0 \quad (2)$

Η εξίσωση εφαπτομένης της (1) με βάση τη (2) γράφεται:

$$y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi) \Leftrightarrow y - f(\xi) = xf'(\xi) - \xi f'(\xi) \overset{(2)}{\Leftrightarrow}$$
$$y = xf'(\xi) + 2f(\xi) \overset{(2)}{\Leftrightarrow} y = -\frac{xf(\xi)}{\xi} + 2f(\xi)$$

και τους τέμνει τους άξονες x'x και y'y στα σημεία:

x'x

$y = 0$

$0 = -\frac{xf(\xi)}{\xi} + 2f(\xi)$

$xf(\xi) = 2\xi f(\xi)$

$x = 2\xi$

A(2ξ,0)

y'y

$x = 0$

$y = 0 + 2f(\xi)$

$y = 2f(\xi)$

B(0,f(ξ))

Επειδή όμως $\frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2\xi}{2} = \xi$ και $\frac{y_A + y_B}{2} = \frac{2f(\xi)}{2} = f(\xi)$

Άρα το $M(\xi, f(\xi))$ είναι το μέσο του ΑΒ.

2^{ος} τρόπος

Έχουμε την εφαπτομένη: $y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi)$

Θα βρούμε τα σημεία στα οποία η ευθεία τέμνει τους δύο άξονες $x'x$ και $y'y$.

Έστω A(x, 0) και B(0, y) τα σημεία αυτά τα οποία επαληθεύουν την εξίσωση της εφαπτομένης οπότε:

$$A \in \text{εφαπτομένη} \Leftrightarrow 0 - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -f(\xi) = xf'(\xi) - \xi f'(\xi) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \xi f'(\xi) - f(\xi) = xf'(\xi)$$

- Αν $f'(\xi) = 0$ τότε:

  $-f(\xi) = 0$ άτοπο από υπόθεση

- Αν $f'(\xi) \neq 0$ τότε

$$x = \frac{\xi f'(\xi) - f(\xi)}{f'(\xi)}$$

Άρα $A\left(\dfrac{\xi f'(\xi) - f(\xi)}{f'(\xi)}, 0\right)$

Όμοια για το Β έχουμε:

$$y - f(\xi) = f'(\xi)(0 - \xi) \Leftrightarrow y - f(\xi) = -\xi f'(\xi)$$
$$y = f(\xi) - \xi f'(\xi)$$

Άρα το $B(0, f(\xi) - \xi f'(\xi))$

Για να είναι το Μ μέσο του ΑΒ πρέπει να ισχύει:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$

$$\xi = \frac{\frac{\xi f'(\xi) - f(\xi)}{f'(\xi)}}{2} \Leftrightarrow$$

$$2\xi = \frac{\xi f'(\xi) - f(\xi)}{f'(\xi)} \Leftrightarrow$$

$$2\xi f'(\xi) = \xi f'(\xi) - f(\xi) \Leftrightarrow$$

$$f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

$$f(\xi) = \frac{0 + f(\xi) - \xi f'(\xi)}{2}$$

$$2f(\xi) = f(\xi) - \xi f'(\xi) \Leftrightarrow$$

$$f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$$

Άρα πρέπει να δείξουμε ότι ισχύει $\xi f'(\xi) + f(\xi) = 0$

ΣΧΟΛΙΟ:

Έχουμε τη σχέση $xf'(x) + f(x) = 0$ και προσπαθούμε να βρούμε την αρχική της.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = xf(x), \quad x \in [\alpha, \beta]$

- Η g είναι συνεχής στο [α,β]
- Η g είναι παραγωγίσιμη στο (α, β)
- $\left.\begin{matrix} g(\alpha) = \alpha f(\alpha) \\ g(\beta) = \beta f(\beta) \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ $g(\alpha) = g(\beta)$ διότι έχουμε $\frac{f(\alpha)}{\beta} = \frac{f(\beta)}{\alpha} \Leftrightarrow$ $\alpha f(\alpha) = \beta f(\beta)$

Άρα από θ.Rolle υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $g'(\xi) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \xi f'(\xi) + f(\xi) = 0$.

Άρα υπάρχει σημείο $M(\xi, f(\xi))$ ώστε να είναι το μέσον του τμήματος ΑΒ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 15

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : [1, e] \to R$ η οποία είναι και παραγωγίσιμη στο $(1, e)$. Αν $f(e) = 0$ να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, e)$ τέτοιο ώστε $\xi f'(\xi) \ln \xi = -f(\xi)$

ΛΥΣΗ

Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $xf'(x) \ln x = -f(x)$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο (1, e)

Για κάθε $x \in (1,e)$ έχουμε:

$$xf'(x)\ln x = -f(x) \Leftrightarrow xf'(x)\ln x + f(x) = 0 \overset{:x}{\Leftrightarrow}$$
$$f'(x)\ln x + f(x)\frac{1}{x} \Leftrightarrow (f(x)\ln x)' = 0$$

Έστω λοιπόν η συνάρτηση $g(x) = f(x)\ln x \quad x \in [1,e]$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι η εξίσωση $g'(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο (1,e). Για την g έχουμε:

- Είναι συνεχής στο [1,e] ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.
- Είναι παραγωγίσιμη στο (1,e)
- $\left.\begin{matrix} g(1) = f(1)\ln 1 = 0 \\ g(e) = f(e)\ln e = 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \quad g(1) = g(e)$

Άρα από θ.Rolle υπάρχει $\xi \in (1,e)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi) = 0$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 16

Αν η συνάρτηση $f:[0,\pi] \to R$ είναι συνεχής, παραγωγίσιμη στο (0, π) και η C_f δεν τέμνει τον άξονα $x'x$ να δείξετε ότι υπάρχει $\gamma \in (0,\pi)$ τέτοιο ώστε:

$$f(\gamma)\sigma\upsilon\nu\gamma = f'(\gamma)\eta\mu\gamma$$

<u>ΛΥΣΗ</u>

Επειδή η C_f δεν τέμνει τον άξονα $x'x$ είναι $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [0,\pi]$. Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x)\sigma\upsilon\nu x = f'(x)\eta\mu x$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο (0,π). Για κάθε $x \in (0,\pi)$ έχουμε:

$$f(x)\sigma\upsilon\nu x = f'(x)\eta\mu x \Leftrightarrow f(x)\sigma\upsilon\nu x - f'(x)\eta\mu x = 0 \Leftrightarrow$$
$$f(x)(\eta\mu x)' - f'(x)\eta\mu x = 0 \overset{:f^2(x)}{\Leftrightarrow} \frac{f(x)(\eta\mu x)' - f'(x)\eta\mu x}{f^2(x)} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\eta\mu x}{f(x)}\right)' = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \dfrac{\eta\mu x}{f(x)} \quad x \in [0,\pi]$

Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $g'(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (0,π).

Για την g έχουμε:

- είναι συνεχής στο [0,π] ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων
- είναι παραγωγίσιμη στο (0,π)
- $$\left.\begin{array}{l} g(0)=\dfrac{\eta\mu 0}{f(0)}=0 \\ g(\pi)=\dfrac{\eta\mu\pi}{f(\pi)}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad g(0)=g(\pi)$$

Άρα από θ.Rolle υπάρχει $\gamma\in(0,\pi)$ τέτοιο ώστε $g'(\gamma)=0$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 17

Έστω ότι η συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to R$ με 0 < α < β είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f(x)>0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$. Αν $(f(\alpha))^{\beta}=(f(\beta))^{\alpha}$ να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_o)\ln f(x_o)=x_o f'(x_o)$.

ΛΥΣΗ

Έχουμε την εξίσωση $f(x)\ln f(x)=xf'(x)$ και θα πρέπει να δείξουμε ότι έχει μία τουλάχιστον λύση στο (α, β). Αναζητούμε λοιπόν την αρχική αυτή ώστε να εφαρμόσουμε το θ.Rolle.

Σε αυτή την άσκηση θα μας βοηθήσει να βρούμε την αρχική ή τη δοθείσα σχέση. Έχουμε:

ΣΧΟΛΙΟ:

Θα βρούμε την αρχική F από την σχέση

$$(f(\alpha))^{\beta}=(f(\beta))^{\alpha} \Leftrightarrow \ln(f(\alpha))^{\beta}=\ln(f(\beta))^{\alpha} \Leftrightarrow$$

$$\alpha\ln f(\beta)=\beta\ln f(\alpha) \Leftrightarrow \frac{\ln f(\alpha)}{\alpha}=\frac{\ln f(\beta)}{\beta} \quad (1)$$

Θεωρούμε συνάρτηση $g(x)=\dfrac{\ln f(x)}{x}, \quad x\in[\alpha,\beta]$

Για την g έχουμε:

- είναι συνεχής στο [α, β] ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων
- είναι παραγωγίσιμη στο (α,β) με

$$g'(x)=\frac{\frac{f'(x)}{f(x)}x-\ln f(x)}{x^2}=\frac{xf'(x)-f(x)\ln f(x)}{x^2 f(x)}$$

- $g(\alpha)=g(\beta)$ από την (1)

Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε:

$$g'(x_o)=0 \Leftrightarrow \frac{x_o f'(x_o)-f(x_o)\ln f(x_o)}{x_o{}^2 f(x_o)}=0 \Leftrightarrow f(x_o)\ln f(x_o)=x_o f'(x_o)$$

ΜΟΡΦΗ 9η : ΥΠΑΡΞΗ $\xi\in(\alpha,\beta)$ ΩΣΤΕ ΝΑ ΙΚΑΝΟΠΟΙΕΙΤΑΙ ΣΧΕΣΗ

ΤΕΧΝΑΣΜΑ ΜΕ $e^{g(x)}$

- Αν έχουμε τη μορφή $f'(x)+g(x)f(x)=h(x)$ ή $f''(x)+g(x)f'(x)h(x)$

Δηλαδή:

$$f'(x)=xf(x) \Leftrightarrow f'(x)-xf(x)=0 \overset{\cdot e^{\frac{x^2}{2}}}{\Leftrightarrow} e^{-\frac{x^2}{2}}f'(x)-e^{-\frac{x^2}{2}}xf(x)=0 \Leftrightarrow \left(e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot f(x)\right)'=0$$

όπου $\left(-\frac{x^2}{2}\right)'=-x$ οπότε θεωρούμε ως $g(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot f(x)$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 18

Δίνεται $f:[\alpha,\beta]\to R$ συνεχής στο [α, β] , παραγωγίσιμη στο (α, β) με $f(\alpha)=f(\beta)=0$.
Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε:

$$f'(\xi)+(1+\sigma\upsilon\nu\xi)f(\xi)=0$$

ΛΥΣΗ

ΣΧΟΛΙΟ: Στο πρόχειρο δουλεύουμε:

$f'(\xi)+(1+\sigma\upsilon\nu\xi)f(\xi)=0 \quad \Leftrightarrow$
$f'(x)+(1+\sigma\upsilon\nu x)f(x)=0 \quad$ με

$g(x)=1+\sigma\upsilon\nu x$ και αρχική της

$G(x)=x+\eta\mu x$ άρα $\quad e^{G(x)}=e^{x+\eta\mu x}$

Οπότε $h(x)=e^{x+\eta\mu x}\cdot f(x)$

ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΕΥΡΕΣΗΣ ΑΡΧΙΚΗΣ

Θεωρούμε $h(x)=e^{x+\eta\mu x}\cdot f(x), \quad x\in[\alpha,\beta]$

- Η h είναι συνεχής στο [α, β] ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων
- Η h είναι παραγωγίσιμη στο (α, β)
- $\left.\begin{array}{l} h(\alpha)=e^{\alpha+\eta\mu\alpha}f(\alpha)=0 \\ h(\beta)=e^{\beta+\eta\mu\beta}f(\beta)=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \quad h(\alpha)=h(\beta)$

Άρα από θ.Rolle υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε

$h'(\xi)=0 \quad \Leftrightarrow$

$e^{\xi+\eta\mu\xi}(1+\sigma\upsilon\nu\xi)f(\xi)+e^{\xi+\eta\mu\xi}f'(\xi)=0 \Leftrightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} e^{\xi+\eta\mu\xi}\left((1+\sigma\upsilon\nu\xi)f(\xi)+f'(\xi)\right) \\ e^{\xi+\eta\mu\xi}>0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad (1+\sigma\upsilon\nu\xi)f(\xi)+f'(\xi)=0$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 19

Η συνάρτηση f έχει δεύτερη παράγωγο και παρουσιάζει ακρότατα στα σημεία α, β.

Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος ώστε: $f''(\xi)+f'(\xi)=0$

ΛΥΣΗ

Έχουμε $f''(\xi)+f'(\xi)=0 \quad \Leftrightarrow \quad f''(x)+1\cdot f'(x)=0$

Άρα ως $g(x)=1$ και η αρχική της $G(x)=x$ οπότε $e^{G(x)}=e^{x}$.

Άρα θεωρούμε συνάρτηση $h(x)=e^{x}f'(x)$.

- Η h συνεχής στο [α, β] ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.
- Η h παραγωγίσιμη στο (α, β)

- $$\left.\begin{array}{l} h(\alpha)=e^{\alpha}f'(\alpha) \\ h(\beta)=e^{\beta}f'(\beta) \\ \text{Στα } \alpha,\beta \text{ η } f \text{ παρουσιάζει ακρότατο} \\ \text{άρα } f'(\alpha)=f'(\beta)=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \quad h(\alpha)=h(\beta)$$

Οπότε από θ.Rolle υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε:

$$h'(\xi)=0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{\xi}f'(\xi)+e^{\xi}f''(\xi)=0$$

$$\left.\begin{array}{r} e^{\xi}\left(f'(\xi)+f''(\xi)\right)=0 \\ e^{\xi}>0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \quad f'(\xi)+f''(\xi)=0$$

ΜΟΡΦΗ 10η: ΥΠΑΡΞΗ ΣΗΜΕΙΟΥ ΤΗΣ C_f ΠΟΥ Η ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΔΙΕΡΧΕΤΑΙ ΑΠΟ ΣΗΜΕΙΟ

- Εφαρμόζω το θ.Rolle στην κατάλληλη αρχική συνάρτηση F της f.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 20

Έστω μια συνάρτηση f, συνεχής στο [2,3] παραγωγίσιμη στο (2,3) και ισχύει $f(3)=3f(2)$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(2,3)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\xi,f(\xi))$ να διέρχεται από το σημείο A(1,0).

<u>ΛΥΣΗ</u>

Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει $\xi\in(2,3)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη $\varepsilon: y-f(\xi)=f'(\xi)(x-\xi)$ στο $M(\xi,f(\xi))$ να διέρχεται από το A(1,0).

Δηλαδή:

$$0-f(\xi)=f'(\xi)(1-\xi) \quad \Leftrightarrow \quad -f(\xi)=f'(\xi)-\xi f'(\xi) \quad \Leftrightarrow$$

$$f'(\xi)(1-\xi)+f(\xi)=0 \quad \Leftrightarrow \quad f'(x)(1-x)+f(x)=0 \quad \overset{\cdot(-1)}{\Leftrightarrow}$$

$$f'(x)(x-1)-f(x)=0 \quad \overset{:(x-1)^2}{\Leftrightarrow} \quad \frac{f'(x)(x-1)-f(x)(x-1)'}{(x-1)^2} \Leftrightarrow \quad \left(\frac{f(x)}{x-1}\right)'=0$$

Άρα αυτή η εξίσωση πρέπει να έχει λύση στο (2,3)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\frac{f(x)}{x-1}$, $x\in[2,3]$

Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $g'(x)=0$ έχει λύση στο (2,3)

Για την g έχουμε:

- H g είναι συνεχής στο [2,3] ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων
- H g είναι παραγωγίσιμη στο (2,3)
- $\left.\begin{aligned} g(2)=\frac{f(2)}{1}=f(2) \\ g(3)=\frac{f(3)}{2}=\frac{2f(2)}{2}=f(2)\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow \quad g(2)=g(3)$

Οπότε από θ.Rolle υπάρχει $\xi\in(2,3)\ :\ g'(\xi)=0$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 21

Έστω μία συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο [α, β], παραγωγίσιμη στο (α,β) και $f(\alpha)=\alpha$, $f(\beta)=\beta$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi,f(\xi))$ να διέρχεται από το σημείο $P(\xi+1,f(\xi)+1)$

<u>ΛΥΣΗ</u>

Η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο $M(\xi,f(\xi))$ έχει εξίσωση

$$y-f(\xi)=f'(\xi)(x-\xi)$$

Αρκεί να δείξουμε ότι το σημείο P διέρχεται από την (ε) δηλαδή την επαληθεύει:

$$\cancel{f(\xi)}+1-\cancel{f(\xi)}=f'(\xi)(\cancel{\xi}+1-\cancel{\xi}) \quad\Leftrightarrow\quad 1=f'(\xi)\quad\Leftrightarrow$$

$$f'(\xi)-1=0\quad\Leftrightarrow\quad f'(x)-1=0\quad\Leftrightarrow\quad (f(x)-x)'=0$$

άρα αυτή η εξίσωση πρέπει να έχει λύση στο (α,β)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-x$

Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $g'(x)=0$ έχει λύση στο (α,β)

Για την g έχουμε:

- είναι συνεχής στο [α, β] ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων

- είναι παραγωγίσιμη στο (α, β)
- $\left.\begin{array}{r} g(\alpha)=f(\alpha)-\alpha=\alpha-\alpha=0 \\ g(\beta)=f(\beta)-\beta=\beta-\beta=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \quad g(\alpha)=g(\beta)$

Οπότε από θ.Rolle υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε $g'(\xi)=0$