ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Γ ΄ΛΥΚΕΙΟΥ (ΜΕΡΟΣ Α)

● ΘΕΩΡΗΜΑ ROLLE

● ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

● ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

❖ ΘΕΩΡΗΜΑ ROLLE

Αν μια συνάρτηση f είναι :

- συνεχής στο κλειστό [α,β]
- παραγωγίσιμη στο ανοιχτό (α,β)
- f(α)=f(β)

τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$

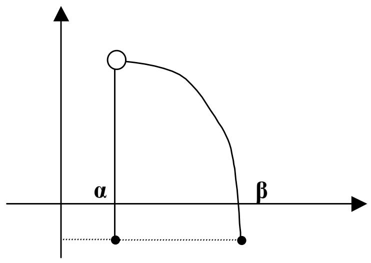
ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ : σημαίνει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha,\beta)$ στο οποίο η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f είναι παράλληλη στον άξονα xx΄.

ΣΧΟΛΙΑ-ΘΕΩΡΙΑ

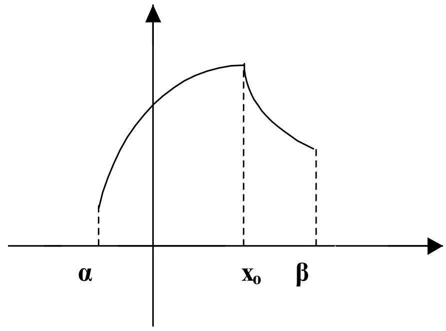
1. Η συνάρτηση f πρέπει να είναι ορισμένη σε διάστημα και όχι σε ένωση διαστημάτων .

2. Αν $f(\rho_1)=f(\rho_2)=0$ δηλαδή οι ρ_1,ρ_2 είναι ρίζες της $f(x)$, τότε η $f'(x)$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (ρ_1,ρ_2). Δηλαδή μεταξύ δυο ριζών της $f(x)$ υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα της $f'(x)$.

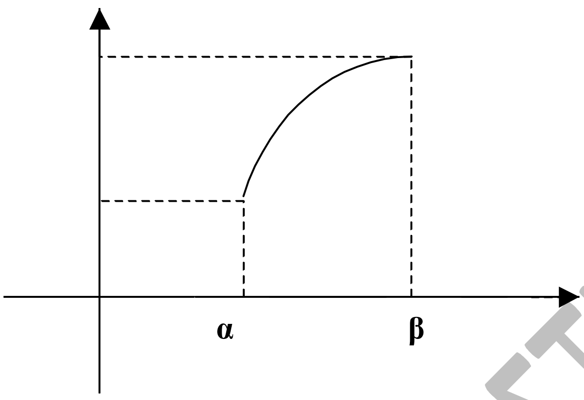
3. Το θεώρημα Rolle ισχύει μόνο όταν ισχύουν και οι τρεις συνθήκες.



Δεν είναι συνεχής στο [α,β]



Δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in (\alpha, \beta)$



$f(\alpha) \neq f(\beta)$

4. Αν η f παραγωγίσιμη στο [α, β] είναι και συνεχής στο [α, β] οπότε εφαρμόζεται το θεώρημα, πληρουμένων και των υπολοίπων προϋποθέσεων φυσικά.

5. **ΦΥΣΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ**

Αν ένα σώμα κινούμενο πάνω σε έναν άξονα διέρχεται από σημείο Α τη χρονική στιγμή t_1 και επιστρέφει πάλι στο Α τη χρονική στιγμή t_2, τότε υπάρχει χρονική στιγμή t_o μεταξύ των t_1, t_2 που η ταχύτητα είναι μηδέν.

Γι΄ αυτό και τα σημεία μηδενισμού της f' λέγονται στάσιμα σημεία.

6. Το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει. Δηλαδή οι τρεις συνθήκες του Θ.Rolle είναι ικανές για την εξασφάλιση σημείου x_o στο (α, β) τέτοιο ώστε $f'(x_o)=0$, δεν είναι όμως αναγκαίες π.χ.

$f(x)=\begin{cases} x^3-3x-5 & x\in[-2,0) \\ 2x^2-4x+3 & x\in[0,5] \end{cases}$ αν και η f είναι ασυνεχής στο $x_o=0$

έχουμε:

$f(x)=\begin{cases} 3x^2-3 & x\in[-2,0) \\ 4x-4 & x\in(0,5] \end{cases}$ και υπάρχουν $x_1=-1\in(-2,0)$ και $x_2=1\in(0,5)$ με

$$f'(x_1)=f'(x_2)=0$$

❖ 3.12.1. ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ROLLE ΚΑΙ ΤΟ ΠΛΗΘΟΣ ΡΙΖΩΝ ΕΞΙΣΩΣΗΣ

1. Να αποδειχθεί ότι μία εξίσωση $f(x)=0$ ***<u>έχει τουλάχιστον κ ρίζες.</u>***

- Για την αντιμετώπιση αυτού του ερωτήματος <u>είτε</u> εφαρμόζουμε για την f το Θ.BOLZANO σε κ κατάλληλα διαστήματα <u>είτε</u> εφαρμόζουμε το Θ.ROLLE (κ- φορές) σε κ κατάλληλα διαστήματα σε μια αρχική συνάρτηση F της f ώστε $F'(x)=f(x)$

▪ **Πιο συγκεκριμένα:**

Αν θέλουμε να δείξουμε ότι η $f(x)=0$ ***<u>έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (α, β)</u>*** τότε χρησιμοποιούμε:

- Το θεώρημα BOLZANO για την f στο [α, β] ή
- Το θεώρημα ROLLE για την αρχική F της f (όταν δεν βρίσκουμε το πρόσημο $f(\alpha)\cdot f(\beta)$ στο [α, β]) ή
- Το σύνολο τιμών της f.
- Την προφανή ρίζα της f (αν υπάρχει)

2. Να αποδειχθεί ότι μία εξίσωση $f(x)=0$ ***<u>έχει το πολύ κ ρίζες.</u>***

- Για την αντιμετώπιση αυτού του προβλήματος εργαζόμαστε ως εξής:

  Υποθέτουμε ότι υπάρχουν κ+1 τουλάχιστον ρίζες

  $\rho_1<\rho_2<..............<\rho_\kappa<\rho_{\kappa+1}$

Τότε το θ.Rolle για την f στα διαστήματα $[\rho_1,\rho_2],[\rho_2,\rho_3],.....,[\rho_\kappa,\rho_{\kappa+1}]$ δίνει για την f' κ ρίζες τις $\xi_1\in(\rho_1,\rho_2),.....,\xi_\kappa\in(\rho_\kappa,\rho_{\kappa+1})$.

Αν το αποτέλεσμα αυτό δεν οδηγεί σε άτοπο τότε συνεχίζουμε το θ.Rolle για την f' στα διαστήματα $[\xi_1,\xi_2],[\xi_2,\xi_3],........,[\xi_{\kappa-1},\xi_\kappa]$

Έτσι η f'' θα έχει κ-1 τουλάχιστον ρίζες τα προηγούμενα (ανοικτά όμως) διαστήματα. Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο, αν χρειαστεί, μέχρι να καταλήξουμε σε άτοπο.

➢ **Πιο συγκεκριμένα:**

Αν θέλουμε να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ ***έχει μία το πολύ ρίζα*** στο (α, β) τότε χρησιμοποιούμε:

- Τη μονοτονία της f
- Το θεώρημα Rolle για την f στο [α, β] μέχρι να καταλήξουμε σε άτοπο.

3. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x)=0$ **έχει ακριβώς κ ρίζες.**

- Για την αντιμετώπιση αυτού του προβλήματος συνδυάζουμε τα δύο προηγούμενα. Αποδεικνύουμε δηλαδή την ύπαρξη κ ριζών και στη συνέχεια ότι δεν μπορεί να υπάρχουν κ+1 ρίζες.

➢ **Πιο συγκεκριμένα:**

Αν θέλουμε να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ***ακριβώς μια ρίζα*** στο (α,β) τότε αρκεί να δείξουμε ότι έχει τουλάχιστον μια και το πολύ μία ρίζα με κατάλληλο συνδυασμό των δύο προηγούμενων περιπτώσεων.

ΔΕΝ ΞΕΧΝΑΜΕ: Αν η f έχει τουλάχιστον κ ρίζες στο (α, β) τότε η f' έχει τουλάχιστον κ-1 ρίζες στο (α, β).

ΑΡΧΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

➢ Όταν θέλουμε να δείξουμε μια σχέση της μορφής :

$$f'(\xi)=c$$

τότε θεωρούμε τη βοηθητική συνάρτηση: $g(x)=f(x)-cx$ στην οποία ενδέχεται να εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle.

➢ Όταν θέλουμε να δείξουμε μια σχέση της μορφής:

$$f'(\xi) = cf(\xi)$$

τότε θεωρούμε τη βοηθητική συνάρτηση : $g(x) = e^{-cx}f(x)$ και εφαρμόζουμε το θεώρημα Rolle.

- Όταν θέλουμε να δείξουμε μία σχέση της μορφής:

$$f'(\xi)(\xi - c) = f(\xi)$$

τότε θεωρούμε τη βοηθητική συνάρτηση: $g(x) = \dfrac{f(x)}{x - c}$ και εφαρμόζουμε το θεώρημα Rolle.

- Όταν θέλουμε να δείξουμε μία σχέση της μορφής

$$\xi f'(\xi) = vf(\xi)$$

τότε θεωρούμε τη βοηθητική συνάρτηση: $g(x) = \dfrac{f(x)}{x^{v}}$ και εφαρμόζουμε το θεώρημα Rolle.

- Όταν θέλουμε να δείξουμε σχέση της μορφής:

$$f'(\xi)(c - \xi) = f(\xi)$$

τότε θεωρούμε τη βοηθητική συνάρτηση: $g(x) = (x - c)f(x)$ και εφαρμόζουμε το θεώρημα Rolle.

- Όταν θέλουμε να δείξουμε σχέση της μορφής:

$$f'(\xi) = v\xi^{v-1}$$

τότε θεωρούμε τη βοηθητική συνάρτηση: $g(x) = f(x) - x^{v}$ και εφαρμόζουμε το θεώρημα Rolle.

- Αν η $f'(x)$ έχει δύο ακριβώς ρίζες $\rho_1 \neq \rho_2$ στο [α, β] στο οποίο η f ικανοποιεί το θ.Rolle τότε η f στο διάστημα (ρ_1, ρ_2) έχει το πολύ μία ρίζα (διότι αν είχε δύο ρίζες π.χ. x_1, x_2 τότε η f' θα είχε ρίζα $\rho_3 \in (x_1, x_2)$ που είναι άτοπο).

➢ ΜΟΡΦΕΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΣΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ROLLE

ΜΟΡΦΗ 1η : Έλεγχος για την ισχύ του θ.Rolle – Εύρεση του $\xi \in (\alpha,\beta)$

- Εξετάζουμε αν ισχύουν οι τρεις προϋποθέσεις του θεωρήματος. Αν ζητούν να βρούμε και το (τα) $\xi \in (\alpha,\beta)$: $f'(\xi)=0$ τότε λύνουμε την εξίσωση $f'(\xi)=0$ με $\xi \in (\alpha,\beta)$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.292

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-x^3-4x^2+5x+1$. Να δείξετε ότι στο διάστημα (0,1) υπάρχει ξ τέτοιος ώστε $f'(\xi)=0$.

<u>ΛΥΣΗ</u>

Για την συνάρτηση f ισχύει:

- Η f συνεχής στο [0,1] ως πολυωνυμική
- Η f παραγωγίσιμη στο (0,1) με $f'(x)=-3x^2-8x+5$
- $\left.\begin{array}{c} f(0)=1 \\ f(1)=-1^3-4\cdot 1^2+5\cdot 1+1=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad f(0)=f(1)$

Επομένως από θ.Rolle υπάρχει $\xi \in (0,1)$ ώστε:

$$f'(\xi)=0 \quad \Leftrightarrow \quad -3\xi^2-8\xi+5=0 \left\langle \begin{array}{l} \xi_1=\dfrac{-4+\sqrt{31}}{3} \\ \xi_2=\dfrac{-4-\sqrt{31}}{3} \end{array}\right.$$

Το ζητούμενο $\xi=\dfrac{-4+\sqrt{31}}{3}\in(0,1)$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.293

Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο [-1,2] και παραγωγίσιμη στο (-1,2) με $f(-1)=1$, $f(2)=-4$. Να δείξετε ότι:

i. Για την συνάρτηση $g(x)=f(x)+x^2$ ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θ.Rolle στο [-1,2].

ii. Υπάρχει $\xi \in (-1,2)$ ώστε $f'(\xi)=-2\xi$.

ΛΥΣΗ

Η $g(x)$ είναι συνεχής στο [-1,2] ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

Ακόμη είναι παραγωγίσιμη στο (-1,2) με $g'(x)=f'(x)+2x$

$$\left.\begin{array}{r} g(-1)=f(-1)+(-1)^2=-1+1=0 \\ g(2)=f(2)+2^2=-4+4=0 \end{array}\right| \Leftrightarrow \quad g(-1)=g(2)=0$$

Άρα από θ.Rolle υπάρχει $\xi\in(-1,2)$ ώστε

$$g'(\xi)=0 \quad \Leftrightarrow \quad f'(\xi)+2\xi=0 \quad \Leftrightarrow \quad f'(\xi)=-2\xi$$

ΜΟΡΦΗ 2η: Προσδιορισμός παραμέτρων ώστε να ισχύει το θ.Rolle

- Απαιτούμε να ισχύουν και οι τρεις προϋποθέσεις του θεωρήματος άρα κατασκευάζουμε εξισώσεις τις οποίες και λύνουμε.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.294

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3-2\alpha x^2+3x+\alpha$. Να βρείτε τον α ώστε να εφαρμόζεται το θ.Rolle στο διάστημα [0,1].

ΛΥΣΗ

Η f είναι συνεχής στο [0,1] ως πολυωνυμική.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο (0,1) με $f'(x)=3x^2-4\alpha x+3$

$$\left.\begin{array}{r} f(0)=\alpha \\ f(1)=1^3-2\alpha\cdot 1+3+\alpha=4-\alpha \end{array}\right| \Leftrightarrow \quad f(0)=f(1) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha=4-\alpha \quad \Leftrightarrow \quad 2\alpha=4 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha=2$$

Για α=2 εφαρμόζεται το θ.Rolle οπότε υπάρχει ένας τουλάχιστον $\xi\in(0,1)$ ώστε

$$f'(\xi)=0 \quad \Leftrightarrow \quad 3\xi^2-8\xi+3=0 \quad \Leftrightarrow \quad \xi_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{7}}{3}$$

Εμείς δεχόμαστε για $\xi=\dfrac{4-\sqrt{7}}{3}\in(0,1)$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.295

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} x^2+\mu x+\nu & x\in[-1,0] \\ \rho x^2+4x+4 & x\in(0,1] \end{cases}$$

Να βρείτε τις τιμές των μ, ν, ρ ώστε να εφαρμόζεται το θ.Rolle για την f.

ΛΥΣΗ

Η f πρέπει να είναι συνεχής στο [-1,1]. Επειδή η f είναι πολλαπλού τύπου πρέπει να ελέγξω τη συνέχεια στο σημείο αλλαγής στο $x_o=0$

$$\left.\begin{aligned} f(0)&=\nu \\ \lim_{x\to 0^-} f(x)&=\lim_{x\to 0^-}(x^2+\mu x+\nu)=\nu \\ \lim_{x\to 0^+} f(x)&=\lim_{x\to 0^+}(\rho x^2+4x+4)=4 \end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

Η f είναι συνεχής στο $x_o=0 \Leftrightarrow$

$$f(0)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)$$

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στα (-1,0) και (0,1) αρκεί να είναι παραγωγίσιμη και στο 0.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\rho x^2+4x+4-4}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\rho x^2+2x}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x(\rho x+4)}{x}=\lim_{x\to 0^+}(\rho x+4)=4$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2+\mu x+4-4}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x(x+\mu)}{x}=\lim_{x\to 0^-}(x+\mu)=\mu$$

Πρέπει $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\Leftrightarrow \mu=4$

Πρέπει
$$\begin{aligned} &f(-1)=f(1) \Leftrightarrow (-1)^2+4\cdot(-1)+4=\rho\cdot 1^2+4\cdot 1+4 \Leftrightarrow \\ &1-4+4=\rho+4+4 \Leftrightarrow \rho+8=1 \Leftrightarrow \rho=-7 \end{aligned}$$

ΜΟΡΦΗ 3η: ΥΠΑΡΞΗ ξ ώστε να ισχύει μια συνθήκη

- Εφαρμόζουμε το θεώρημα Rolle για τη συνάρτηση που μας δίνεται.

  Δεν ξεχνάμε ότι $f(\alpha)=f(\beta)$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.296

i. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x-\alpha)^{\mu}(x-\beta)^{\nu}$, $\mu,\nu\in R^*$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε: $\xi = \dfrac{\nu\alpha+\mu\beta}{\mu+\nu}$

ii. Να αποδείξετε ότι το παραπάνω ξ χωρίζει το διάστημα [α, β] σε λόγο $\dfrac{\mu}{\nu}$ δηλαδή ισχύει $\dfrac{\xi-\alpha}{\beta-\xi} = \dfrac{\mu}{\nu}$

ΛΥΣΗ

i. Η f είναι συνεχής στο [α, β] ως πολυωνυμική

Η f είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) με

$$f'(x) = \mu(x-\alpha)^{\mu-1}(x-\beta)^{\nu} + \nu(x-\alpha)^{\mu}(x-\beta)^{\nu-1}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(\alpha)=0 \\ f(\beta)=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \quad f(\alpha)=f(\beta)=0$$

Οπότε από θεώρημα Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha,\beta)$ ώστε

$$f'(\xi)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu(\xi-\alpha)^{\mu-1}(\xi-\beta)^{\nu} + \nu(\xi-\alpha)^{\mu}(\xi-\beta)^{\nu-1} = 0 \quad \overset{:(\xi-\alpha)^{\mu-1}\cdot(\xi-\beta)^{\nu-1}}{\Leftrightarrow}$$

$$\mu(\xi-\beta)+\nu(\xi-\alpha)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu\xi+\nu\xi=\mu\beta+\nu\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \xi(\mu+\nu)=\nu\alpha+\mu\beta \quad \Leftrightarrow$$

$$\xi = \frac{\nu\alpha+\mu\beta}{\mu+\nu}$$

ΣΧΟΛΙΟ:

$\xi-\alpha \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \xi \neq \alpha$

ii. Έχουμε:

$$\xi = \frac{\nu\alpha+\mu\beta}{\nu+\mu} \quad \Leftrightarrow \quad \mu\xi+\nu\xi=\nu\alpha+\mu\beta \quad \Leftrightarrow$$

$$\nu\xi-\nu\alpha=\mu\beta-\mu\xi \quad \Leftrightarrow \quad \nu(\xi-\alpha)=\mu(\beta-\xi) \quad \Leftrightarrow \frac{\xi-\alpha}{\beta-\xi} = \frac{\mu}{\nu}$$

ΜΟΡΦΗ 4η: ΣΧΕΣΕΙΣ ΡΙΖΩΝ ΤΗΣ f(x) ΚΑΙ ΤΗΣ $f'(x)$

- Αν ρ_1, ρ_2 ρίζες της f διαδοχικές, δηλαδή

$$\left.\begin{array}{l} f(\rho_1)=0 \\ f(\rho_2)=0 \end{array}\right| \Rightarrow \text{ από θ.Rolle υπάρχει } \xi \in (\rho_1, \rho_2) : f'(\xi)=0$$

ΒΑΣΙΚΗ ΑΣΚΗΣΗ

Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ να δείξετε ότι:

i. Μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της f στο Δ υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της f'

ii. Μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της f' στο Δ υπάρχει μία το

ΛΥΣΗ

i. Έστω ρ_1, ρ_2 δύο διαδοχικές ρίζες της f, δηλαδή:

$f(\rho_1)=f(\rho_2)=0$

- H f είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2] \subseteq \Delta$
- H f είναι παραγωγίσιμη στο $(\rho_1, \rho_2) \subseteq \Delta$
- $f(\rho_1)=f(\rho_2)=0$

από θ.Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\rho_1, \rho_2)$: $f'(\xi)=0$

i. Για να αποδείξουμε το πολύ θα χρησιμοποιήσουμε το θ.Rolle και θα πρέπει να καταλήξουμε σε άτοπο:

Έστω x_1, x_2 δύο διαδοχικές ρίζες της f' δηλαδή $f'(x_1)=f'(x_2)=0$

Έστω ότι η f έχει δύο διαδοχικές ρίζες στο (x_1, x_2) τις ρ_1, ρ_2 με $x_1 < \rho_1 < \rho_2 < x_2$ και $f(\rho_1)=f(\rho_2)=0$

Τότε από το (α) ερώτημα και με βάση το θ.Rolle υπάρχει $\xi \in (\rho_1, \rho_2)$: $f'(\xi)=0$ άτοπο.

Άρα η f έχει το πολύ μία πραγματική ρίζα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.297

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$

Να δείξετε ότι η $f'(x)=0$ έχει όλες τις ρίζες πραγματικές.

ΛΥΣΗ

Παρατηρούμε ότι $f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=0$ και επειδή η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη, εφαρμόζεται το θ.Rolle για την $f(x)$ στα διαστήματα [1,2], [2,3], [3,4].

Άρα υπάρχει από μία τουλάχιστον ρίζα της $f'(x)=0$ για κάθε ένα από τα διαστήματα (1,2), (2,3), (3,4). Επειδή η f είναι $4^{ου}$ βαθμού η f' είναι $3^{ου}$ βαθμού.

Άρα f' είναι $3^{ου}$ βαθμού

Και f' έχει τρεις τουλάχιστον ρίζες

Η f έχει ακριβώς τρεις ρίζες.

ΜΟΡΦΗ $5^η$: ΝΑ ΔΕΙΞΟΥΜΕ ΟΤΙ Η $f(x)$ ή $f(x)=0$ ΕΧΕΙ κ ΤΟ ΠΟΛΥ ΡΙΖΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ

- Χρησιμοποιούμε την εις άτοπο επαγωγή. Έστω ότι έχει κ+1 ρίζες πραγματικές και εφαρμόζουμε το θ.Rolle κ φορές μέχρι να καταλήξουμε σε άτοπο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.298

Να δείξετε ότι η εξίσωση $e^x = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με α, β, $\gamma \in R$ έχει το πολύ τρεις πραγματικές ρίζες.

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε $f(x)=e^x - \alpha x^2 - \beta x - \gamma \quad x \in R$

Έστω ότι η f έχει τέσσερις ρίζες πραγματικές ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4 με $\rho_1<\rho_2<\rho_3<\rho_4$ και $f(\rho_1)=f(\rho_2)=f(\rho_3)=f(\rho_4)=0$.

Επειδή f συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και η f παραγωγίσιμη με $f'(x)=e^x-2\alpha x-\beta$ εφαρμόζουμε το θ.Rolle σε καθένα από τα διαστήματα $[\rho_1, \rho_2]$, $[\rho_2, \rho_3]$, $[\rho_3, \rho_4]$.

Επομένως υπάρχουν $\xi_1 \in (\rho_1,\rho_2)$, $\xi_2 \in (\rho_2,\rho_3)$ και $\xi_3 \in (\rho_3,\rho_4)$ ώστε

$$f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=f'(\xi_3)=0$$

Για την $f'(x)=e^x-2\alpha x-\beta$ γνωρίζουμε ότι είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη με $f''(x)=e^x-2\alpha$

Οπότε μπορούμε να εφαρμόσουμε το θ.Rolle για την f' στα διαστήματα $[\xi_1,\xi_2]$ και $[\xi_2,\xi_3]$ και προκύπτουν $\theta_1 \in (\xi_1,\xi_2)$ και $\theta_2 \in (\xi_2,\xi_3)$ ώστε $f''(\theta_1)=f''(\theta_2)=0$

Παρόμοια θα κινηθούμε και για την $f''(x)=e^x-2\alpha$ η οποία είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με $f^{(3)}(x)=e^x$ οπότε εφαρμόζουμε το θ.Rolle στο διάστημα $[\theta_1, \theta_2]$ και προκύπτει:

$\gamma \in (\theta_1,\theta_2)$ ώστε $f^{(3)}(\gamma)=0 \Leftrightarrow \quad e^{\gamma}=0 \quad$ άτοπο $\qquad$ γιατί πάντα $e^x>0$

Επομένως η f έχει το πολύ τρεις πραγματικές ρίζες.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.299

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}+4x+\lambda=0$ έχει το πολύ μία ρίζα στο διάστημα (2,3) για κάθε $\lambda \in R$.

ΛΥΣΗ

Έστω ότι η δοσμένη εξίσωση έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο (2,3) τις ρ_1 και ρ_2 με $\rho_1<\rho_2$. Είναι δηλαδή $2<\rho_1<\rho_2<3$. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}+4x+\lambda \qquad x \in R$$

- Η f είναι συνεχής στο $[\rho_1,\rho_2]$ ως πολυωνυμική
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_1,ρ_2) με $f'(x)=x^2-5x+4$
- $f(\rho_1)=f(\rho_2)=0$

Άρα από θ.Rolle υπάρχει $\xi \in (\rho_1,\rho_2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$

Άρα $f'(\xi)=0 \Leftrightarrow \xi^2-5\xi+4=0 \Leftrightarrow \left\langle \begin{array}{l} \xi=1 \\ \xi=4 \end{array} \right.$

Αυτό όμως είναι άτοπο διότι $\xi \in (2,3)$

Άρα η δοσμένη συνάρτηση έχει το πολύ μία ρίζα στο (2,3).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.300

Έστω μία συνάρτηση $f: R \to R$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη. Αν η εφαπτομένη της $C_{f'}$ σε οποιοδήποτε σημείο της δεν είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon: y=3x+1$ να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=\frac{3x^2}{2}+7x-\lambda$, $\lambda \in R$ έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες.

ΛΥΣΗ

Για κάθε $x \in R$ έχουμε $f''(x) \neq \lambda \Leftrightarrow f''(x) \neq 3$

Η εξίσωση $f(x)=\frac{3x^2}{2}+7x-\lambda$ γράφεται $f(x)-\frac{3x^2}{2}-7x+\lambda=0$

Ονομάζουμε $g(x)=f(x)-\frac{3x^2}{2}-7x+\lambda$ και υποθέτουμε ότι η εξίσωση $g(x)=0$ έχει τρεις πραγματικές ρίζες x_1, x_2, x_3 με $x_1<x_2<x_3$.

Η g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη σε καθένα από τα διαστήματα $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$ με $g'(x) = f'(x) - 3x - 7$ και $g(x_1) = g(x_2) = g(x_3) = 0$

Άρα από θ.Rolle υπάρχουν $\xi_1 \in (x_1, x_2)$ και $\xi_2 \in (x_2, x_3)$ ώστε

$g'(\xi_1) = 0$ και $g'(\xi_2) = 0$

Όμοια η $g'(x) = f'(x) - 3x - 7$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\xi_1, \xi_2]$ με $g''(x) = f''(x) - 3$

Άρα και πάλι από θ.Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o \in (\xi_1, \xi_2)$ ώστε

$g''(x_o) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f''(x_o) - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f''(x_o) = 3$ άτοπο από την υπόθεση

Οπότε η δοθείσα εξίσωση έχει δύο το πολύ ρίζες.