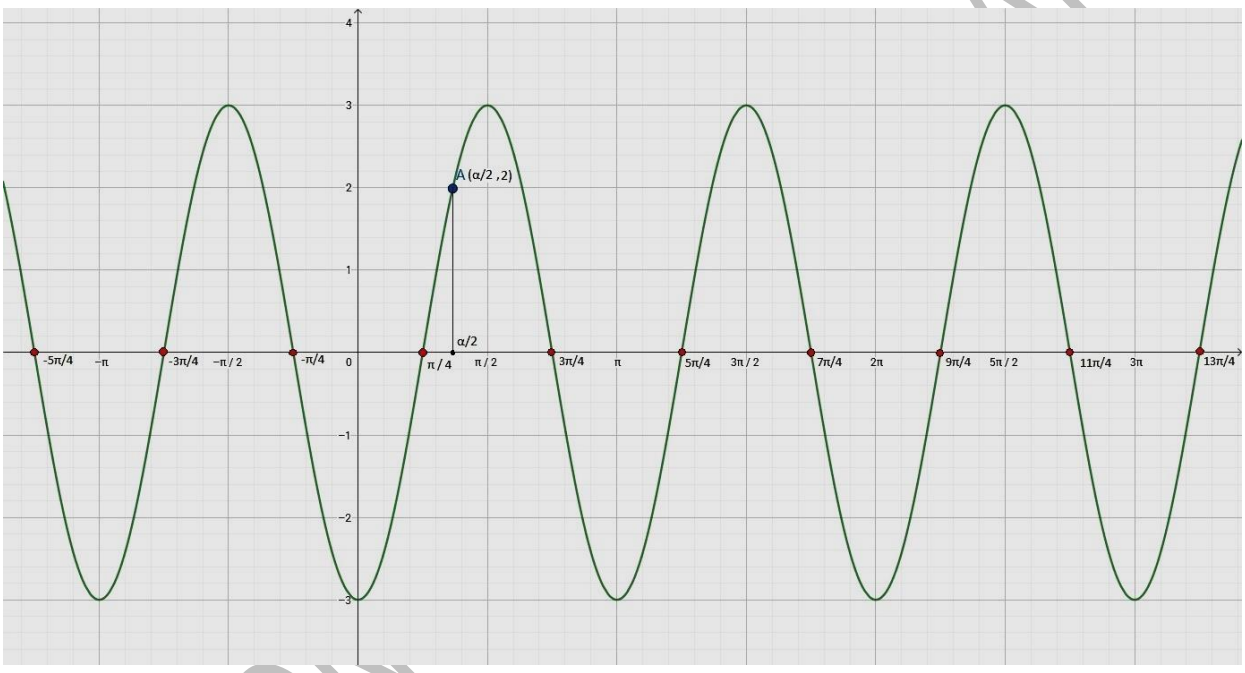
ΘΕΜΑ Α

Δίνεται η παρακάτω γραφική παράσταση της συνάρτησης f.



Α.1. Από τη γραφική παράσταση να δείξετε ότι $f(x) = -3συν2x$.

Α.2. Αν το σημείο $A(\frac{\alpha}{2}, 2)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης, να βρείτε όλους τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας α.

Α.3. Να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης

$$A = \frac{3ημ\left(\frac{41\pi}{2} - \alpha\right) + 3\sqrt{5} \cdot ημ(17\pi - \alpha)}{εφ(-\alpha) \cdot εφ\left(\frac{11\pi}{2} + \alpha\right)}$$

Α.4. Να λυθεί η εξίσωση $f\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = 2f(\frac{x}{2})$ στο διάστημα $\left(-\frac{3\pi}{2}, \pi\right)$.

ΛΥΣΗ

Α.1. Από τη γραφική παράσταση που δόθηκε παρατηρούμε ότι η συνάρτηση f θα έχει τύπο της μορφής $f(x)=\rho\cdot συν(\omega x)$ με ρ<0.
Επειδή η περίοδος της συνάρτησης που δόθηκε είναι $T=\pi$ θα έχουμε:

$$\frac{2\pi}{\omega}=\pi\Leftrightarrow\omega=2$$

Επίσης έχουμε ότι :

$$\begin{cases} minf(x)=-3 \\ \& \\ maxf(x)=3 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} -|\rho|=-3 \\ \& \\ |\rho|=3 \end{cases}\Leftrightarrow|\rho|=3\overset{\rho<0}{\Longleftrightarrow}\rho=-3$$

Επομένως προκύπτει ότι

$$f(x)=-3συν2x$$

Α.2. Εφόσον το σημείο $A(\frac{\alpha}{2},2)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης τότε θα ισχύει ότι :

$$f\left(\frac{a}{2}\right)=2\Leftrightarrow-3συν\left(2\frac{\alpha}{2}\right)=2\Leftrightarrow συνα=-\frac{2}{3}$$

Επίσης από το σχήμα που δόθηκε έχουμε ότι :

$$\frac{\pi}{4}<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{2}\overset{\cdot 2}{\Leftrightarrow}\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$$

Δηλαδή η γωνία α βρίσκεται στο 2ο τεταρτημόριο επομένως ημα>0, εφα<0 και σφα<0.

Έχουμε:

$$ημ^2\alpha=1-συν^2\alpha=1-\left(-\frac{2}{3}\right)^2=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}\overset{ημα>0}{\Longleftrightarrow}ημα=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$εφα=\frac{ημα}{συνα}=\frac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{-\frac{2}{3}}=-\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$σφα=\frac{1}{εφα}=-\frac{2}{\sqrt{5}}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Α.3. Έχουμε διαδοχικά

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΒΑΚΑΛΗ

$$A=\frac{3\eta\mu\left(\frac{41\pi}{2}-\alpha\right)+3\sqrt{5}\cdot\eta\mu(17\pi-\alpha)}{\varepsilon\varphi(-\alpha)\cdot\varepsilon\varphi\left(\frac{11\pi}{2}+\alpha\right)}$$

$$=\frac{3\eta\mu\left(20\pi+\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+3\sqrt{5}\cdot\eta\mu(16\pi+\pi-\alpha)}{-\varepsilon\varphi\alpha\cdot\varepsilon\varphi\left(4\pi+\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}$$

$$=\frac{3\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+3\sqrt{5}\cdot\eta\mu(\pi-\alpha)}{-\varepsilon\varphi\alpha\cdot\varepsilon\varphi\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}=\frac{3\sigma\upsilon\nu\alpha+3\sqrt{5}\eta\mu\alpha}{-\varepsilon\varphi\alpha\cdot(-\sigma\varphi\alpha)}$$

$$=\frac{3\left(-\frac{2}{3}\right)+3\sqrt{5}\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}}{1}=-2+5=3$$

Α.4. Έχουμε:

$$f\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=2f\left(\frac{x}{2}\right)\Leftrightarrow-3\sigma\upsilon\nu\left[2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\right]=-6\sigma\upsilon\nu2\left(\frac{x}{2}\right)\overset{:(-3)}{\Longleftrightarrow}$$

$$\sigma\upsilon\nu\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=2\sigma\upsilon\nu x\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu x\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}+\eta\mu x\cdot\eta\mu\frac{\pi}{3}=2\sigma\upsilon\nu x\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\eta\mu x=2\sigma\upsilon\nu x\overset{\cdot2}{\Leftrightarrow}\sigma\upsilon\nu x+\sqrt{3}\cdot\eta\mu x=2\sigma\upsilon\nu x\Leftrightarrow$$

$$\sqrt{3}\eta\mu x=\sigma\upsilon\nu x\overset{:\eta\mu x}{\Longleftrightarrow}\sigma\varphi x=\sqrt{3}\Leftrightarrow x=\kappa\pi+\frac{\pi}{6},\qquad\kappa\in\mathbb{Z}$$

Επιπλέον έχουμε ότι :

$$x\epsilon\left(-\frac{3\pi}{2},\pi\right)\Leftrightarrow-\frac{3\pi}{2}<x<\pi\Leftrightarrow-\frac{3\pi}{2}<\kappa\pi+\frac{\pi}{6}<\pi\overset{-\frac{\pi}{6}}{\Leftrightarrow}-\frac{5\pi}{3}<\kappa\pi<\frac{5\pi}{6}\Leftrightarrow$$

$$-\frac{5}{3}<\kappa<\frac{5}{6}\overset{\kappa\epsilon\mathbb{Z}}{\Leftrightarrow}\begin{cases}\kappa=-1\\ \text{ή}\\ \kappa=0\end{cases}$$

Επομένως:

- για $\kappa=-1$ έχουμε $x=-\pi+\frac{\pi}{6}=-\frac{5\pi}{6}$
- για $\kappa=0$ έχουμε $x=\frac{\pi}{6}$

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΒΑΚΑΛΗ

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = 2\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\cdot\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}+2x\right) - 2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)$$

Β.1. Να δείξετε ότι $f(x) = 2\eta\mu 3x$.

Β.2. Να βρείτε τη μέγιστη, την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης και την περίοδό της και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση στο διάστημα [0.2π].

Β.3. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $\sqrt{2}\cdot f\left(x-\frac{\pi}{18}\right)+2=0$

β. $f^2(x)+3f(x)-4=0$

Β.4. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{f\left(\frac{x}{3}\right)}{2-f\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{3}\right)} = \frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}$$

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΒΑΚΑΛΗ

ΛΥΣΗ

Β.1. Έχουμε ότι:

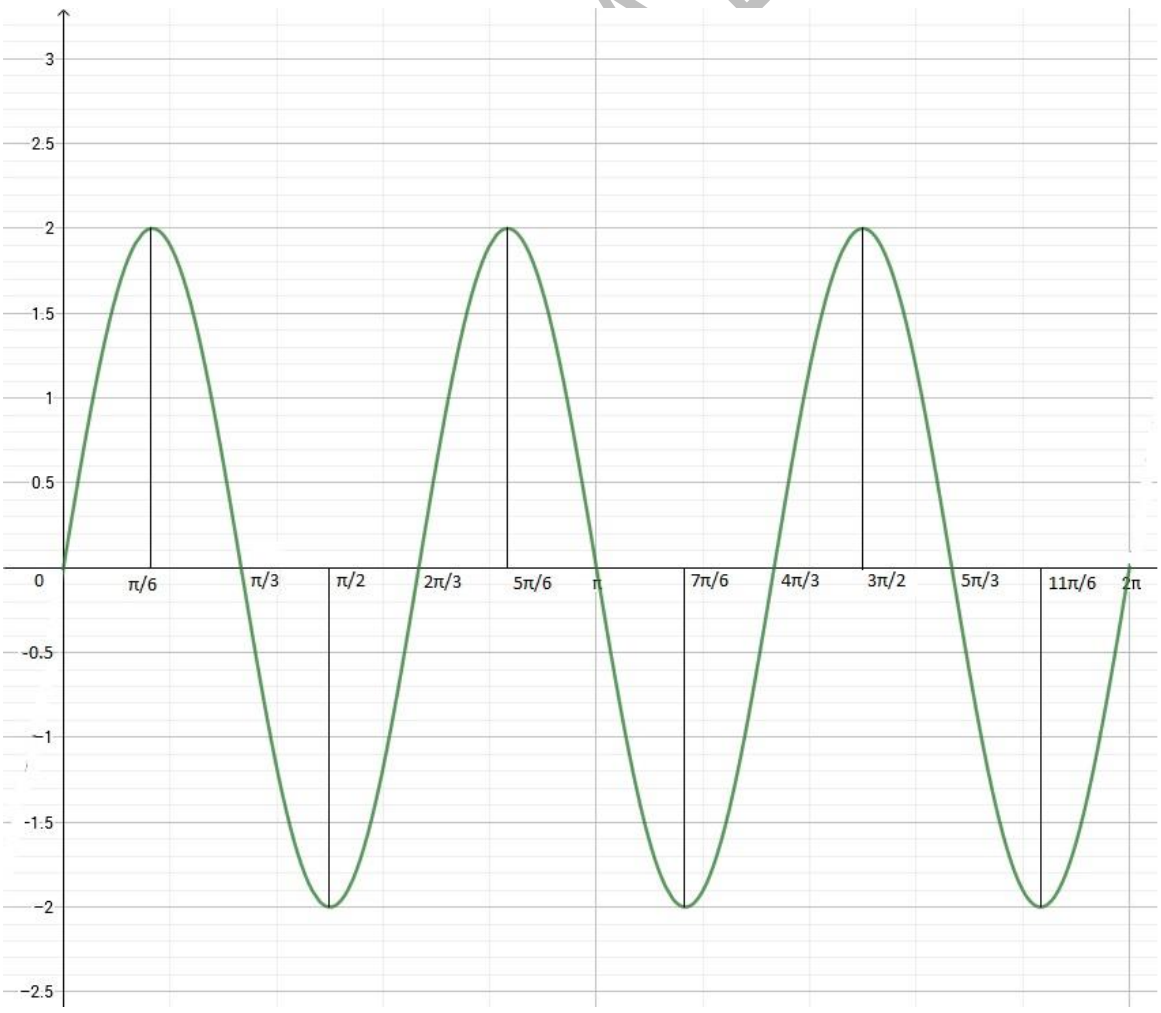
$$f(x) = 2\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\cdot\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}+2x\right) - 2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)$$
$$= -2\left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}+2x\right) - \eta\mu\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\cdot\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)\right]$$
$$= -2\cdot\sigma\upsilon\nu\left[\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)\right] = -2\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+3x\right) = 2\cdot\eta\mu 3x$$

Β.2. Γνωρίζουμε ότι :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{3}$$

$$\begin{cases} maxf(x) = |2| = 2 \\ \& \\ minf(x) = -|2| = -2 \end{cases}$$

Η γραφική παράσταση της f στο διάστημα [0,2π] φαίνεται παρακάτω:



ΒΑΚΑΛΗ

Β.3.

α. Έχουμε:

$$\sqrt{2}f\left(x-\frac{\pi}{18}\right)+2=0\Leftrightarrow\sqrt{2}\cdot 2\eta\mu\left[3\left(x-\frac{\pi}{18}\right)\right]=-2\Leftrightarrow$$

$$\eta\mu\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\eta\mu\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)=\eta\mu\left(-\frac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}3x-\frac{\pi}{6}=2\kappa\pi-\frac{\pi}{4}\\ \text{ή}\\ 3x-\frac{\pi}{6}=2\kappa\pi+\frac{5\pi}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x=2\kappa\pi-\frac{\pi}{12}\\ \text{ή}\\ 3x=2\kappa\pi+\frac{17\pi}{12}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{2\kappa\pi}{3}-\frac{\pi}{36}\\ \text{ή}\\ x=\frac{2\kappa\pi}{3}+\frac{17\pi}{36}\end{cases},\kappa\in\mathbb{Z}$$

β. Έχουμε:

$$f^2(x)+3f(x)-4=0\Leftrightarrow(2\eta\mu3x)^2+6\eta\mu3x-4=0\Leftrightarrow$$

$$2\eta\mu^2 3x+3\eta\mu3x-2=0$$

Η παραπάνω εξίσωση έχει $\Delta=9+16=25$. Επομένως:

$$\eta\mu3x=\frac{-3\pm5}{4}\Leftrightarrow\begin{cases}\eta\mu3x=\frac{1}{2}\\ \text{ή}\\ \eta\mu3x=-2\ \ \textit{που απορρίπτεται}\end{cases}$$

Οπότε έχουμε:

$$\eta\mu3x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}3x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6}\\ \text{ή}\\ 3x=2\kappa\pi+\frac{5\pi}{6}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{2\kappa\pi}{3}+\frac{\pi}{18}\\ \text{ή}\\ x=\frac{2\kappa\pi}{3}+\frac{5\pi}{18}\end{cases},\kappa\in\mathbb{Z}$$

Β.4. Έχουμε ότι:

$$f\left(\frac{x}{3}\right)=2\eta\mu3\frac{x}{3}=2\eta\mu x$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{3}\right)=2\eta\mu\left[3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{3}\right)\right]=2\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=-2\sigma\upsilon\nu x$$

Συνεπώς:

$$\frac{f\left(\frac{x}{3}\right)}{2-f\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{3}\right)}=\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}\Leftrightarrow\frac{2\eta\mu x}{2+2\sigma\upsilon\nu x}=\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}\Leftrightarrow$$

$$\frac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}=\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}\Leftrightarrow\eta\mu^2x=(1-\sigma\upsilon\nu x)(1+\sigma\upsilon\nu x)\Leftrightarrow$$

$$\eta\mu^2x=1-\sigma\upsilon\nu^2x$$

που ισχύει

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΒΑΚΑΛΗ