Λύσεις τριγωνομετρικών εξισώσεων

Η εξίσωση ημx = α

Αρχικά αναζητούμε μια γωνία θ ώστε να ισχύει ημθ = α . Τότε έχουμε :

ημx = ημθ ⇔ x = 2κπ – θ ή x = 2κπ + π – θ , κ∈Z

Παρατήρηση : Αν η τιμή α είναι αρνητική τότε βρίσκουμε γωνία θ ώστε $\eta\mu\theta = |\alpha|$ και χρησιμοποιούμε την ιδιότητα –ημθ = ημ(–θ)

Παράδειγμα : Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\eta\mu x = \frac{1}{2}$ **β)** $\eta\mu x + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$

Λύση :

α) $\eta\mu x = \frac{1}{2} \Rightarrow \eta\mu x = \eta\mu\frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \\ \text{ή} \\ x = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{6} = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases}$ με $\kappa \in Z$.

β)

$$\eta\mu x + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \Rightarrow \eta\mu x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \eta\mu x = -\eta\mu\frac{\pi}{3} \Rightarrow \eta\mu x = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \left(-\frac{\pi}{3}\right) \\ \text{ή} \\ x = 2\kappa\pi + \pi - \left(-\frac{\pi}{3}\right) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi - \dfrac{\pi}{3} \\ \quad\quad ή \\ x = 2\kappa\pi + \dfrac{4\pi}{3} \end{cases}$$

<u>Η εξίσωση συνx = α</u>

Αρχικά αναζητούμε μια γωνία θ ώστε να ισχύει συνθ = α . Τότε έχουμε :

συνx = συνθ $\Leftrightarrow$ x = 2κπ $\pm$ θ , κ$\in$Z

Παρατήρηση : Αν η τιμή α είναι αρνητική τότε βρίσκουμε γωνία θ ώστε $\sigma\upsilon\nu\theta = |\alpha|$ και χρησιμοποιούμε την ιδιότητα –συνθ = συν(π – θ)

Παράδειγμα : Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\sigma\upsilon\nu x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **β)** $\sigma\upsilon\nu x + \dfrac{1}{2} = 0$

Λύση :

α) $\sigma\upsilon\nu x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \eta\mu x = \eta\mu\dfrac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2\kappa\pi \pm \dfrac{\pi}{4}$ με $\kappa \in Z$.

β)

$$\sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu x = -\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 2\kappa\pi \pm \frac{2\pi}{3} \text{ με } \kappa \in Z.$$

<u>Οι εξισώσεις εφx = α και σφx = α</u>

Αρχικά αναζητούμε μια γωνία θ ώστε να ισχύει εφθ = α ή σφθ = α . Τότε έχουμε :

εφx = εφθ $\Leftrightarrow$ x = κπ + θ , κ$\in$Z

σφx = σφθ $\Leftrightarrow$ x = κπ + θ , κ$\in$Z

Παρατήρηση : Αν η τιμή α είναι αρνητική τότε βρίσκουμε γωνία θ ώστε $\varepsilon\varphi\theta = |\alpha|$ ή $\sigma\varphi\theta = |\alpha|$ και χρησιμοποιούμε την ιδιότητα –εφθ = εφ(–θ) ή –σφθ = σφ(–θ)

Παράδειγμα : Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\varepsilon\varphi x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ **β)** $\sigma\varphi x + 1 = 0$

Λύση :

α) $\varepsilon\varphi x = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \eta\mu x = \eta\mu\dfrac{\pi}{6} \Rightarrow x = \kappa\pi + \dfrac{\pi}{6}$ με $\kappa \in Z$.

β)

$$\sigma\varphi x + 1 = 0 \Rightarrow \sigma\varphi x = -1 \Rightarrow \sigma\varphi x = -\sigma\varphi\dfrac{\pi}{4} \Rightarrow \sigma\varphi x = \sigma\varphi\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) \Rightarrow x = \kappa\pi + \left(-\dfrac{\pi}{4}\right) \Rightarrow x = \kappa\pi - \dfrac{\pi}{4}$$

με $\kappa \in Z$.

<u>**Λυμένα παραδείγματα – μεθοδολογίες**</u>

1. Να λύσετε την εξίσωση $\eta\mu\left(3\chi + \dfrac{\pi}{4}\right) + 1 = 0$.

Λύση:

Είναι

$$\eta\mu\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right) + 1 = 0 \Rightarrow \eta\mu\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right) = -1 \Rightarrow$$

$$\eta\mu\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right) = -\eta\mu\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \eta\mu\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \eta\mu\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$$

$$3x + \dfrac{\pi}{4} = 2\kappa\pi - \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow 3x = 2\kappa\pi - \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow 3x = 2\kappa\pi - \dfrac{3\pi}{4} \Rightarrow x = \dfrac{2\kappa\pi}{3} - \dfrac{\frac{\pi}{4}}{3} \Rightarrow x = \dfrac{2\kappa\pi}{3} - \dfrac{\pi}{12}$$

ή

$$3x + \dfrac{\pi}{4} = 2\kappa\pi + \pi - \left(-\dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow 3x = 2\kappa\pi + \dfrac{3\pi}{2} - \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow 3x = 2\kappa\pi + \dfrac{5\pi}{4} \Rightarrow x = \dfrac{2\kappa\pi}{3} + \dfrac{5\pi}{12} \quad ,$$

με $\kappa \in Z$.

2. Να λύσετε την εξίσωση $\eta\mu x + 2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x = 0$

Λύση:

$$\eta\mu x + 2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x = 0 \Rightarrow \eta\mu x\left(1 + 2\sigma\upsilon\nu x\right) = 0 \Rightarrow \eta\mu x = 0 \text{ ή } 1 + 2\sigma\upsilon\nu x = 0$$

- $\eta\mu\chi = 0 \Rightarrow \eta\mu x = \eta\mu 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi \\ \quad\text{ή} \\ x = 2\kappa\pi + \pi \end{cases}$ με $\kappa \in Z$.

- $1 + 2\sigma\upsilon\nu x = 0 \Rightarrow 2\sigma\upsilon\nu x = -1 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu x = -\frac{1}{2} \Rightarrow$

$$\sigma\upsilon\nu x = -\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = 2\kappa\pi \pm \frac{2\pi}{3} \quad \text{με } \kappa \in Z$$

3. Να λύσετε την εξίσωση : $2\eta\mu^2 x + 3\sigma\upsilon\nu x = 0$

Λύση:

Μεθοδολογία :

Όταν έχουμε εξισώσεις της μορφής: $\boldsymbol{\alpha\eta\mu^2 x + \beta\sigma\upsilon\nu x + \gamma = 0}$
Αντικαθιστούμε στην εξίσωση το $\eta\mu^2 x$ με το $1 - \sigma\upsilon\nu^2 x$ και έχουμε:

$$2\eta\mu^2 x + 3\sigma\upsilon\nu x = 0 \Rightarrow 2\left(1 - \sigma\upsilon\nu^2 x\right) + 3\sigma\upsilon\nu x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 - 2\sigma\upsilon\nu^2 x + 3\sigma\upsilon\nu x = 0 \Rightarrow -2\sigma\upsilon\nu^2 x + 3\sigma\upsilon\nu x + 2 = 0 \Rightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2 x - 3\sigma\upsilon\nu x - 2 = 0$$

Όταν έχουμε εξισώσεις της μορφής: $\boldsymbol{\alpha\sigma\upsilon\nu^2 x + \beta\sigma\upsilon\nu x + \gamma = 0}$
Θέτουμε $\sigma\upsilon\nu x = y$

Οπότε η εξίσωση γίνεται :
$2y^2 - 3y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2$ ή $y = -\frac{1}{2}$
Για $y = 2 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu x = 2$, που είναι αδύνατη
Για $y = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu x = -\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = 2\kappa\pi \pm \frac{2\pi}{3} \;,\; \kappa \in Z.$$

Ομοίως όταν έχουμε εξισώσεις της μορφής: $\boldsymbol{\alpha\sigma\upsilon\nu^2 x + \beta\eta\mu x + \gamma = 0}$
Αντικαθιστούμε στην εξίσωση το $\sigma\upsilon\nu^2 x$ με το $1 - \eta\mu^2 x$

4. Να λυθεί η εξίσωση: $\sigma\varphi x = \sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x$

Λύση:

Περιορισμοί: Θα πρέπει $\eta\mu x \neq 0 \Rightarrow \eta\mu x \neq \eta\mu 0 \Rightarrow x \neq 2\kappa\pi$ και $x \neq 2\kappa\pi + \pi$

Έχουμε $\sigma\varphi x=\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x\Rightarrow \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}=\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x\Rightarrow \sigma\upsilon\nu x=\sqrt{2}\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x\Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x=0\Rightarrow \sigma\upsilon\nu x\left(\sqrt{2}\eta\mu x-1\right)=0$

Άρα $\sigma\upsilon\nu x=0$ ή $\sqrt{2}\eta\mu x-1=0$

- $\sigma\upsilon\nu x=0\Rightarrow \sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow x=2\kappa\pi\pm\dfrac{\pi}{2}\quad,\ \kappa\in Z.$

- $\sqrt{2}\eta\mu x-1=0\Rightarrow \eta\mu x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow \eta\mu x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow \eta\mu x=\eta\mu\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow \begin{cases} x=2\kappa\pi+\dfrac{\pi}{4} \\ \text{ή} \\ x=2\kappa\pi+\pi-\dfrac{\pi}{4}\end{cases}\Rightarrow$

$$\Rightarrow x=\begin{cases} x=2\kappa\pi+\dfrac{\pi}{4} \\ \text{ή} \\ x=2\kappa\pi+\dfrac{3\pi}{4}\end{cases}\quad,\ \kappa\in Z.$$

5. Να λυθεί η εξίσωση : $\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x=0$

Λύση:

Μεθοδολογία : Αν κ · ημαx = λ · συναx (οι γωνίες των δύο τριγωνομετρικών αριθμών είναι ίσες) τότε διαιρούμε και τα δύο μέλη της με $\sigma\upsilon\nu\alpha x\neq 0$ και γίνεται $\dfrac{\eta\mu\alpha x}{\sigma\upsilon\nu\alpha x}=\dfrac{\kappa}{\lambda}\Rightarrow \varepsilon\varphi\alpha x=\dfrac{\kappa}{\lambda}.$

$\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x=0\Rightarrow \eta\mu x=\sigma\upsilon\nu x\overset{(:\,\sigma\upsilon\nu x\neq 0)}{\Rightarrow}\dfrac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}=\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu x}\Rightarrow \varepsilon\varphi x=1\Rightarrow$

$\Rightarrow \varepsilon\varphi x=\varepsilon\varphi\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow x=\kappa\pi+\dfrac{\pi}{4}\ ,\ \kappa\in Z$

6. Να λυθεί η εξίσωση : $\eta\mu\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)=\sigma\upsilon\nu x$

Λύση:

Μεθοδολογία : Αν ημαx = συνβx (δηλαδή στην περίπτωση που οι γωνίες δεν είναι ίσες)

Σε αυτή την περίπτωση δεν διαιρούμε ώστε να σχηματιστεί η εφαπτομένη αλλά μετασχηματίζουμε ένα από τους δύο τριγωνομετρικούς αριθμούς με τη βοήθεια των σχέσεων $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)=\sigma\upsilon\nu\omega$ ή $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)=\eta\mu\omega$. Με τον τρόπο αυτό πετυχαίνουμε να προκύψουν ίδιοι τριγωνομετρικοί αριθμοί

Είναι $\eta\mu\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\sigma\upsilon\nu x \Rightarrow \eta\mu\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ οπότε:

$$2x+\frac{\pi}{6}=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}-x \Rightarrow 2x+x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6} \Rightarrow 3x=2\kappa\pi+\frac{2\pi}{6} \Rightarrow x=\frac{2\kappa\pi}{3}+\frac{2\pi}{18} \Rightarrow x=\frac{2\kappa\pi}{3}+\frac{\pi}{9}$$

ή

$$2x+\frac{\pi}{6}=2\kappa\pi+\pi-\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \Rightarrow 2x+\frac{\pi}{6}=2\kappa\pi+\pi-\frac{\pi}{2}+x \Rightarrow 3x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6} \Rightarrow$$

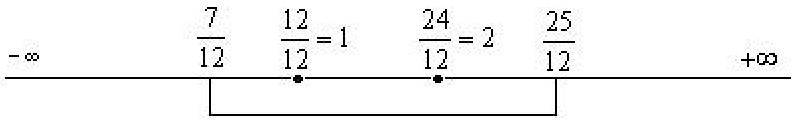
$$\Rightarrow 3x=2\kappa\pi+\frac{4\pi}{6} \Rightarrow x=\frac{2\kappa\pi}{3}+\frac{4\pi}{12} \Rightarrow x=\frac{2\kappa\pi}{3}+\frac{\pi}{3} \qquad \text{με } \kappa\in Z.$$

7. Να λυθεί η εξίσωση του παραδείγματος **6** στο διάστημα $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$

- Αν $x=\frac{2\kappa\pi}{3}+\frac{\pi}{9}$ τότε έχουμε :

$$\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2}<\frac{2\kappa\pi}{3}+\frac{\pi}{9}<\frac{3\pi}{2} \xRightarrow{\text{προσθέτουμε το } \left(-\frac{\pi}{9}\right)} \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{9}<\frac{2\kappa\pi}{3}+\cancel{\frac{\pi}{9}}-\cancel{\frac{\pi}{9}}<\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{7\pi}{18}<\frac{2\kappa\pi}{3}<\frac{25\pi}{18} \xRightarrow{\text{πολλαπλασιάζουμε με 3}} \frac{7\pi}{6}<2\kappa\pi<\frac{25\pi}{6} \xRightarrow{\text{Διαιρούμε με } 2\pi} \frac{7}{12}<\kappa<\frac{25}{12}$$



Επειδή $\kappa\in Z$ προκύπτει ότι κ = 1 ή κ = 2 , επομένως οι λύσεις που έχουμε σε αυτή την περίπτωση είναι :

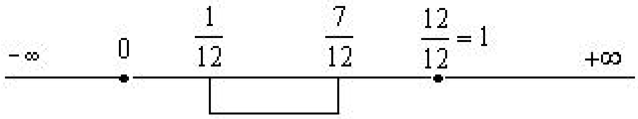
Για $\kappa=1$ $x=\frac{2\cdot 1\cdot\pi}{3}+\frac{\pi}{9}=\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{9}=\frac{7\pi}{9}$

Για $\kappa=2$ $x=\frac{2\cdot 2\pi}{3}+\frac{\pi}{9}=\frac{4\pi}{3}+\frac{\pi}{9}=\frac{13\pi}{9}$

- Αν $x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{3}$ τότε έχουμε :

$$\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2}<2\kappa\pi+\frac{\pi}{3}<\frac{3\pi}{2} \xRightarrow{-\frac{\pi}{3}} \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}<2\kappa\pi+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}<\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{3} \Rightarrow$$

$$\frac{\pi}{6}<2\kappa\pi<\frac{7\pi}{6} \xRightarrow{:(2\pi)} \frac{1}{12}<\kappa<\frac{7}{12}$$



Επειδή $\kappa \in Z$ σύμφωνα με τον παραπάνω περιορισμό δεν υπάρχουν ακέραιες λύσεις , άρα σε αυτή την περίπτωση δεν έχουμε λύσεις.

Άλυτες Ασκήσεις

1 Να λύσετε τις εξισώσεις :

i) $\eta\mu x = 0$ ii) $\sigma\upsilon\nu x = 0$ iii) $\eta\mu x = 1$ iv) $\eta\mu x = -1$ v) $\sigma\upsilon\nu x = -1$

2 Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\eta\mu x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ii) $\sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ iii) $\varepsilon\varphi x = \sqrt{3}$ iv) $\sigma\varphi x = 1$

3 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\eta\mu x = \eta\mu\frac{\pi}{5}$ β) $\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{7}$ γ) $\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi 10^{o}$

4 Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $\eta\mu x = -\eta\mu\frac{\pi}{7}$ β) $\sigma\upsilon\nu x = -\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{9}$ γ) $\varepsilon\varphi x + \varepsilon\varphi\frac{\pi}{10} = 0$ δ) $\sigma\varphi 2x + \sigma\varphi\frac{\pi}{8} = 0$

5 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\eta\mu 2x = \eta\mu\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ β) $\varepsilon\varphi\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \varepsilon\varphi\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$

6 Να λύσετε τις εξισώσεις :

i) $\eta\mu x\left(\sigma\upsilon\nu x - 1\right) = 0$ ii) $\sigma\upsilon\nu x\left(\eta\mu x + 1\right) = 0$

7 Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $2\eta\mu^2 x + \eta\mu x = 0$ ii) $\varepsilon\varphi^2 3x + \varepsilon\varphi 3x = 0$

8 Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x=1+\sigma\upsilon\nu x$ ii) $(1-2\eta\mu x)^2+2\eta\mu x-1=0$

9 Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $\eta\mu 2x=\sigma\upsilon\nu x$ β) $\varepsilon\varphi 3x-\sigma\varphi\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0$

10 Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $4\sigma\upsilon\nu^2 x-1=0$ ii) $\varepsilon\varphi^2 x-3=0$

11 Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $2\eta\mu^2 x-\eta\mu x-1=0$ ii) $\varepsilon\varphi^2 x-\left(1-\sqrt{3}\right)\varepsilon\varphi x-\sqrt{3}=0$

12 Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\sigma\upsilon\nu x=1+\frac{2}{\sigma\upsilon\nu x}$ ii) $\frac{3}{\varepsilon\varphi^2 x}=\frac{2\sqrt{3}}{\varepsilon\varphi x}-1$

13Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\sigma\upsilon\nu^2 x-7\eta\mu^2 x+1=0$ ii) $3\sigma\upsilon\nu^2 x-\eta\mu^2 x-3=0$

14 Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $2\sigma\upsilon\nu^2 x+\sqrt{3}\eta\mu x+1=0$ ii) $3\sigma\upsilon\nu^2 x+2=\eta\mu^2 x+4\sigma\upsilon\nu x$

15 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\eta\mu\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=-\sigma\upsilon\nu x$ β) $\varepsilon\varphi\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)+\sigma\varphi\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=0$

16 Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\eta\mu x=\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu x$ ii) $\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu 2x+\eta\mu 2x=0$

17 Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\sigma\varphi x=2\sigma\upsilon\nu x$ ii) $3\varepsilon\varphi x=\eta\mu x$ iii) $\varepsilon\varphi x+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}=\sigma\upsilon\nu x$

iv) $\eta\mu x-\frac{1}{\eta\mu x}=\sigma\varphi x$

18 Να λύσετε την εξίσωση $\varepsilon\varphi x=\sqrt{3}$, $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

19 Να λύσετε την εξίσωση $2\etaμx+1=0$, $x\in(-\pi\ ,\ 2\pi)$