ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΟ ΘΕΜΑ

ΣΤΟ 1^{ο} ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Δίνεται η παραβολή $f(x)=\alpha x^2$ η οποία διέρχεται από το σημείο $M(\alpha,8)$. Θεωρούμε επίσης την ευθεία (ε) η οποία διέρχεται από το σημείο $N(-3,-2)$ και σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία ω για την οποία ισχύει : $3|3-\omega|=|2\omega+36|$.

i. Να δείξετε ότι $\alpha=2$.
ii. Να δείξετε ότι $(\varepsilon): y=x+1$.
iii. Να βρείτε τα κοινά σημεία της παραβολής και της ευθείας (ε).
iv. Να σχεδιάσετε την ευθεία (ε) και την παραβολή στο ίδιο σύστημα αξόνων.
v. Με βάση το σχήμα, να βρείτε για ποιες τιμές του x η παραβολή βρίσκεται πάνω από την ευθεία (ε). Στη συνέχεια να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το αποτέλεσμα.
(Υπόδειξη : η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g αν $f(x)>g(x)$.)

ΛΥΣΗ :

i. Το σημείο $M(\alpha,8)\in C_f \Leftrightarrow f(\alpha)=8 \Leftrightarrow \alpha\cdot\alpha^2=8 \Leftrightarrow \alpha^3=8 \Leftrightarrow \alpha=2$.
Δηλαδή : $f(x)=2x^2$, $x\in\Re$.

ii. Έστω $(\varepsilon): y=\lambda x+\beta$ η ευθεία που ψάχνω. Για τη γωνία ω ισχύει : $0^\circ\le\omega<180^\circ$.

$$3|3-\omega|=|2\omega+36| \Leftrightarrow 3(3-\omega)=2\omega+36 \Leftrightarrow 9-3\omega=2\omega+36 \Leftrightarrow -5\omega=27 \Leftrightarrow \omega=-\frac{27}{5}\ \alpha\pi\acute{o}\rho.$$

$$\acute{\eta} \quad \Leftrightarrow 3(3-\omega)=-(2\omega+36) \Leftrightarrow 9-3\omega=-2\omega-36 \Leftrightarrow \omega=45^\circ$$

Άρα $\lambda=\varepsilon\phi 45^\circ \Leftrightarrow \lambda=1$ και $(\varepsilon): y=x+\beta$.
Όμως $N(-3,-2)\in(\varepsilon) \Leftrightarrow -2=-3+\beta \Leftrightarrow \beta=1$. Τελικά : $(\varepsilon): y=x+1$.

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΒΑΚΑΛΗ

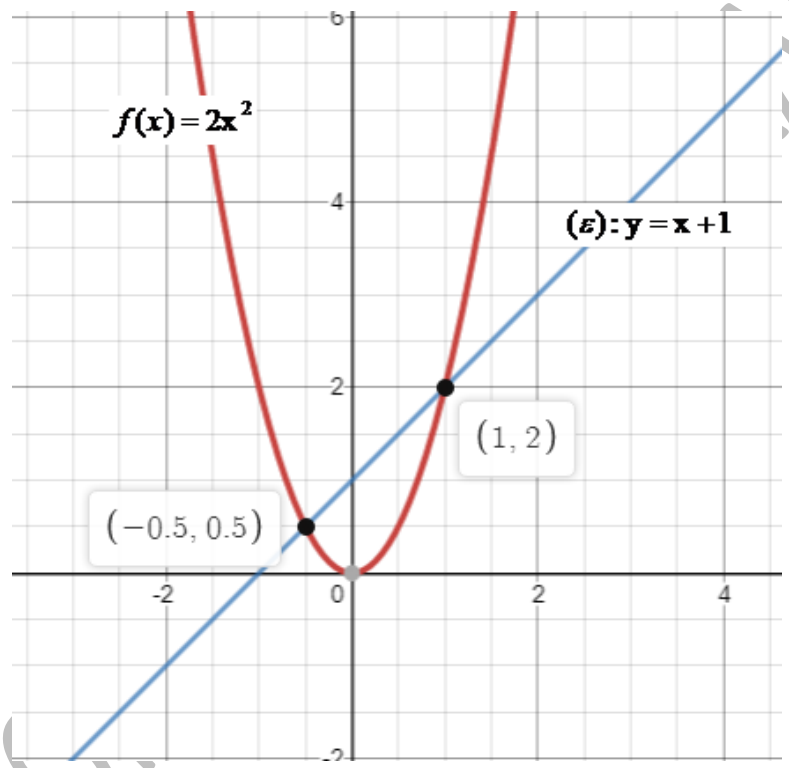
iii. Για να βρούμε τα κοινά σημεία της παραβολής και της ευθείας (ε), θα λύσουμε το σύστημα : $\begin{cases} y = 2x^2 & (1) \\ y = x+1 & (2) \end{cases}$

Η (2) λόγω της (1) γίνεται : $2x^2 = x+1 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = -\frac{1}{2}$.

Για $x = 1$ από (2) έχω $y = 2$

Για $x = -\frac{1}{2}$ από (2) έχω $y = \frac{1}{2}$. Επομένως η παραβολή $f(x) = 2x^2$ και η ευθεία $(\varepsilon): y = x+1$ τέμνονται στα σημεία $A(1,2)$ και $B\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

iv.



v. Από το σχήμα έχουμε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από την ευθεία (ε) για $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (1, +\infty)$.

Αλγεβρικά γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από την ευθεία (ε) αν :

$f(x) > y \Leftrightarrow 2x^2 > x+1 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (1, +\infty)$ καθώς :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		1	$+\infty$
$2x^2 - x - 1$	+	0	-	0	+